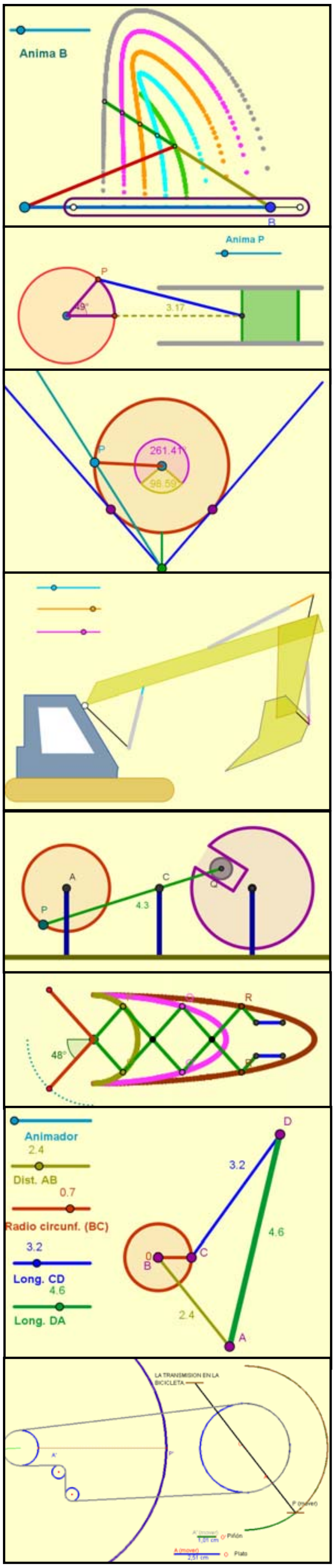
Matemáquinas.

La Geometría de los Mecanismos



Guía del alumnado

Autor: José Antonio Mora Sánchez

IES Sant Blai. Alacant

Índice.

1. Requisitos técnicos.

Matemáquinas, la Geometría de los Mecanismos es una página Web que puede ser ejecutada sin dificultad desde cualquier ordenador provisto de navegador.

Se ha diseñado para una resolución de 800x600 o superior. Si algún applet no cabe en pantalla, se puede pasar a pantalla completa (F11).

Las páginas de *Matemáquinas* contienen unos ochenta applets interactivos para los que puede que sea necesario actualizar la máquina virtual de java en el ordenador. La descarga es gratuita en la dirección:
http://www.java.com/es/download/ .

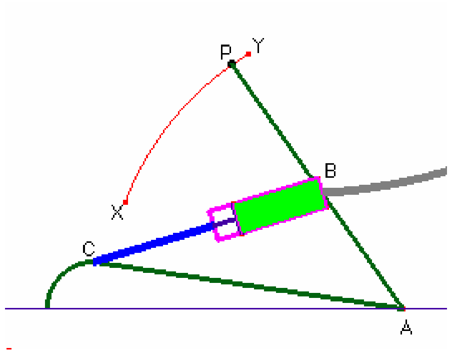
Para la construcción de los applets se han utilizado los programas de Geometría Dinámica: Cabri II y GeoGebra, el segundo de ellos es software libre, por lo que alumnos y profesores pueden revisar las construcciones realizadas o hacer otras nuevas, aunque para estudiar los mecanismos de esta propuesta didáctica, es suficiente la experimentación con las animaciones y applets interactivos que se abren con cualquier navegador.

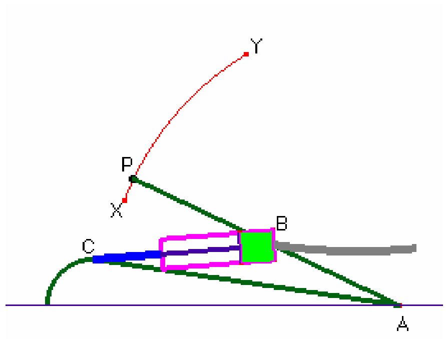
Con GeoGebra se han realizado una o varias de las construcciones de cada capítulo. Es un software libre que se puede instalar de forma gratuita tanto en los ordenadores del centro como en los particulares con el fin de que los estudiantes puedan revisar el protocolo de construcción del archivo para modificarlo o elaborar uno propio. El programa GeoGebra se puede descargar en la página: http://www.geogebra.org.

2. Presentación.

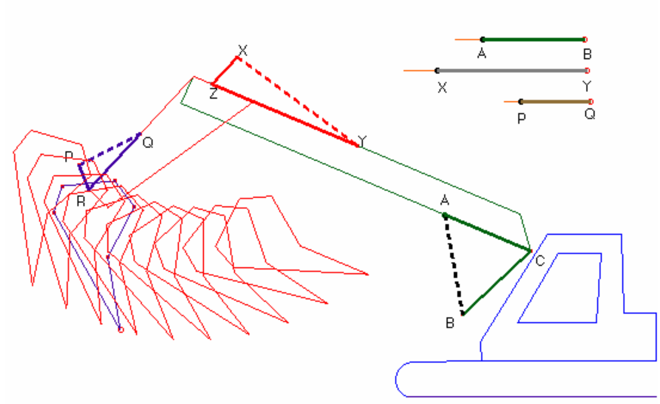
2.1. Propósito y objetivos.

El objetivo de esta web es presentar una colección de mecanismos realizados con Geometría Dinámica.Con las construcciones realizadas se ha simulado el funcionamiento de objetos, la mayoría de los diseños pertenecen al ámbito de la geometría que se utiliza en la vida cotidiana: el gato elevador, el funcionamiento del motor de la máquina de vapor, el mecanismo de brazo oscilatorio o el cilindro hidráulico. Todos ellos han servido de base para estudiar distintas formas de construir el triángulo que tiene un lado de longitud variable, y aplicarlo a nuevas situaciones, como la puerta levadiza de los garajes, la aguja en la máquina de coser, la limadora o las máquinas utilizadas en la construcción que utilizan brazos articulados.





La estructura de los materiales está centrada en agrupar los mecanismos que siguen un determinado esquema de funcionamiento. Desde el punto de vista matemático el hilo conductor lo constituyen los polígonos utilizados. Para cada diseño se relata la secuencia de construcción con Geometría Dinámica de forma que se resaltan sus propiedades y se analiza la forma en que esta construcción geométrica se utiliza en mecanismos de la tecnología: la grúa, la excavadora, la balanza de dos platillos, el limpiaparabrisas del autobús, el movimiento de la pierna del ciclista al pedalear, el mecanismo de cierre automático de las puertas, etc.



Visto de esta manera, los mecanismos se convierten en un contexto para hacer geometría y para comprender el funcionamiento de muchos de los objetos que nos rodean. Es muy importante poder trabajar estos temas desde la óptica de las matemáticas y completarla con aportaciones de otras áreas como la física, la tecnología, la educación física, la plástica o la informática.

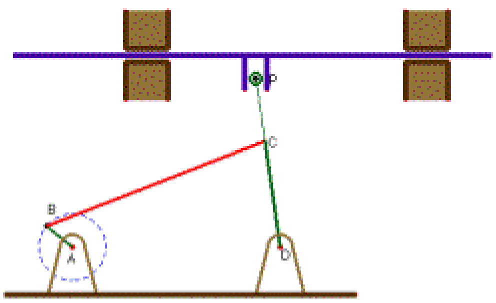
2.2. Antecedentes.

Un estudio clásico en el análisis de los mecanismos desde la óptica del estudio de polígonos es el libro de B. Bolt. y J. Hiscocks (1970). *Machines, mechanisms and mathematics*, en el que ya se planteaban situaciones de alto contenido matemático con barras articuladas y correas de transmisión que más adelante Brian Bolt (1991) trata en profundidad en *Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología*. Se puede considerar que la web *Matemáquinas, la Geometría de los Mecanismos* es un homenaje al autor del libro y un intento de trasladar la propuesta de Bolt a Internet en la que los diseños son animados a la vez que se facilita la interactividad con las construcciones.

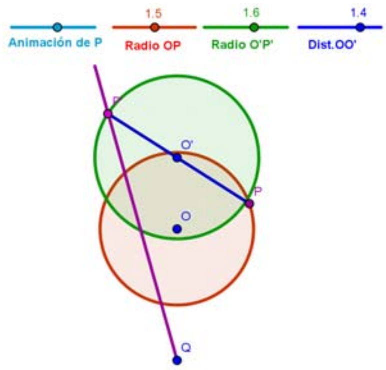
La construcción geométrica de los mecanismos para esta web comenzó en 1995 con una versión de prueba del programa Cabri II que los autores del software aportarron a los asistentes a las VII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Madrid. Era la herramienta ideal para traducir las ideas de Bolt. Aunque hace unos años ha salido una versión más reciente de Cabri II (plus), se ha preferido utilizar la anterior ya que es la que envió la Conselleria de Educació de la Comunitat Valenciana a muchos centros de Secundaria.

Los dos últimos años ha tenido un gran desarrollo el programa GeoGebra (actualmente se encuentra la versión 3.2), que ha aportado muy buena conexión con gráficos, una hoja de cálculo y exporta con facilidad a applets java. con la ventaja añadida de ser software libre.

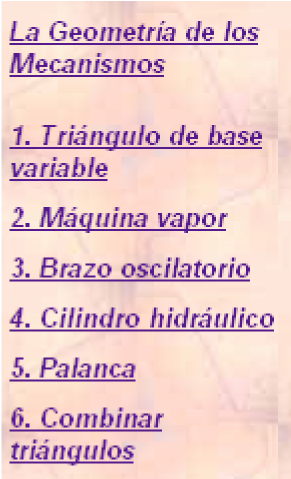
- Cabri II plus. Se puede encontrar una versión demo del programa en http://www.cabri.com/download-cabri-2-plus.html es completa durante los 30 primeros días. A partir de entonces sólo permite sesiones de quince minutos. Será útil para estudiar la creación de algún mecanismo aunque no servirá para generar otros nuevos.
- GeoGebra se puede descargar libremente en la dirección http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com_content&task=blogcategory&id=71&Itemid=55



Mecanismo con Cabri II



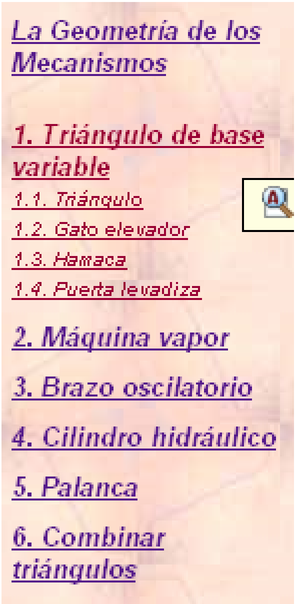
Mecanismo con GeoGebra



2.3. Navegación.

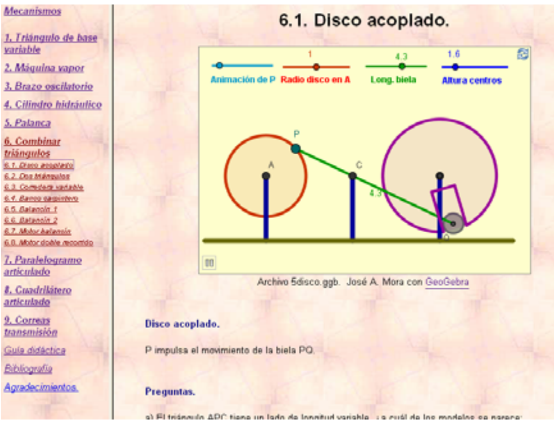
La página inicial da paso a una página de contenidos con dos marcos. A izquierda tendremos siempre una barra con el índice de contenidos:

- La presentación.
- Los nueve capítulos que muestran distintas formas de utilizar los polígonos en los mecanismos.
- El capítulo en el que estamos aparecerá con el contenido desarrollado y en color rojo.
- Las secciones finales dedicadas a los complementos: bibliografía, guía didáctica y colaboradores.



En cada capítulo, la primera página se dedica a hacer un pequeño resumen de los mecanismos que se han incluido y el resto a mostrar cada uno de ellos individualmente: el applet, una pequeña explicación escrita ya que la exposición más extensa es la que proporciona el applet mediante la animación y la posibilidad de interactuar con los parámetros libres del mecanismo. Para acabar, se plantean una o varias preguntas con el objetivo de que el estudiante se cuestione algunas de las relaciones que se encuentre en el mecanismo.

Presentación del capítulo 8



Mecanismo 6.1. Disco acoplado

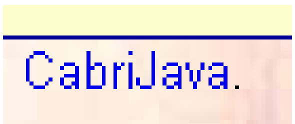
3. La Geometría Dinámica.

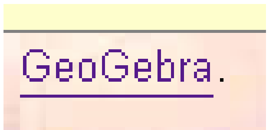
3.1. Animaciones.

En la geometría del movimiento necesitamos hacer accesibles no sólo las imágenes representadas, sino también las ideas y los conceptos involucrados. Queremos que los alumnos realicen abstracciones de las ideas que les presentamos, para que lleguen a manejar con soltura conceptos, a veces difíciles, que requieren de suficiente experiencia previa para comprenderlos.

Se ha intentado aprovechar las ventajas que ofrecen los programas de Geometría Dinámica, tanto en la presentación de los conceptos como en la posibilidad de interactuar sobre las construcciones mediante la modificación de algunos parámetros, con el fin de crear secuencias animadas.

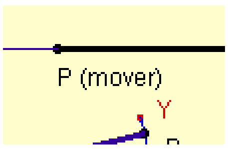
Todas las construcciones se han realizado con applets java interactivos para involucrar al estudiante en su aprendizaje. Cuando se inicia el archivo html con el navegador, la construcción arranca en movimiento. Las acciones a realizar a partir de ahora dependerán del programa con el que se haya realizado el applet que viene indicado en la línea inferior del applet::



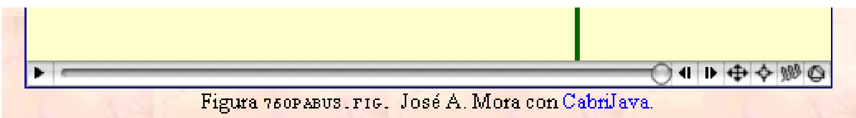


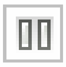
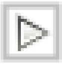
- Cabri: al pulsar con el ratón en el centro del applet el movimiento se detiene y pasaremos a manipular directamente los puntos móviles. Cuando queramos que se reanude la animación, debemos pulsar de nuevo sobre una zona libre (amarilla) del applet.

  Una vez detenida la animación vamos al punto etiquetado con la palabra **(mover)** para “agarrarlo” con el ratón y llevarlo a la posición que queramos:

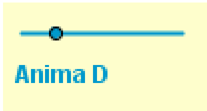
  Una doble pulsación del ratón con el ratón en el centro del applet hace aparecer una barra en la región inferior. Los mandos permiten hace que la construcción del dibujo avance paso a paso o recuperar el archivo que generado el applet.



- GeoGebra. En la parte inferior izquierda tenemos un icono que puede tomar dos posiciones
    -  Está en movimiento. Al pulsar sobre él se detendrá.
    -  Está parado. Al pulsarlo reanudará la animación.

   Este icono se encuentra en la esquina superior derecha y se utiliza para devolver el applet a su posición inicial.

  Cuando detenemos el applet podemos ir al deslizador que provoca el movimiento y que normalmente tiene este aspecto:

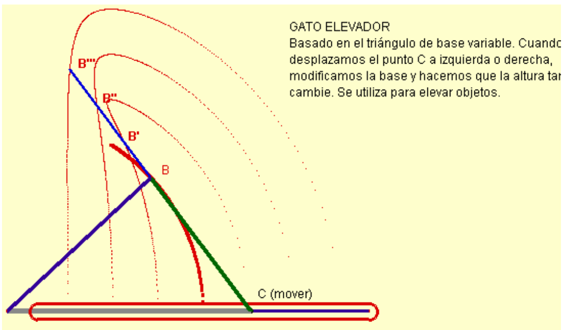
  

  Lo llevaremos manualmente a la posición que nos interese revisar.

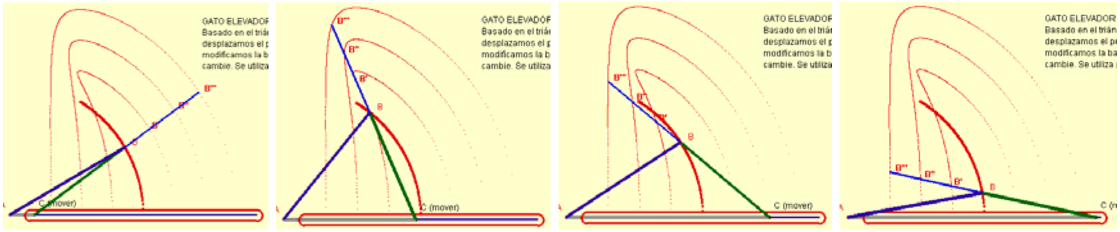
  La doble pulsación en el interior del applet hace que se abra en nuestro ordenador el archivo GeoGebra que se ha creado (para que ocurra es necesario tener el programa GeoGebra instalado en el ordenador).

3.2. Interactividad.

Todos los applets se ven en primera instancia mediante una animación automática que nuestra el funcionamiento del mecanismo e intenta resaltar los elementos geométricos que se aprecian en él.



Cuando detenemos la animación, podemos interactuar sobre el diseño con los procedimientos descritos en el apartado anterior, para llevar al sistema al lugar que deseemos dentro de los límites marcados por la construcción. Por ejemplo, en este diseño del gato elevador, podemos llevar el punto C de izquierda a derecha para estudiar la elevación de varios puntos colocados sobre la barra y la trayectoria que siguen:



Esta interacción con el ordenador no sustituye la construcción de mecanismos con varillas articuladas, pero puede ser un buen complemento, especialmente en la simulación de mecanismos más complicados que serían muy difíciles de realizar en la realidad,

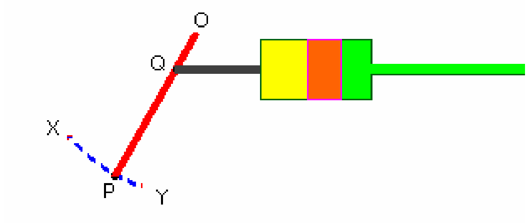
3.3. Los programas de Geometría Dinamica.

Los actuales programas de Geometría Dinamica resultan ser un instrumento adecuado para diseñar con el ordenador estos mecanismos porque aportan interesantes herramientas no encontradas en anteriores recursos para el aprendizaje de la geometría:

- Incluye el *movimiento*: podemos construir el diseño de forma que, cuando se accione el pedal con la herramienta *animación*, todo el sistema -los puntos que hayamos relacionados con el que actúa como pedal-, se muevan con él simulando el funcionamiento de la máquina.
- Permite la inclusión de algunos parámetros y *elementos variables* que podemos modificar.
- Posibilita que el programa aprenda con nosotros mediante la construcción y ejecución de *procedimientos, macros o nuevas herramientas* que, una vez diseñadas, podremos utilizar en cualquier momento.
- Introduce *diversas herramientas de presentación -color, grosores, rellenado, ocultación de elementos,, etc.-, con los que se consigue* que los diseños sean más atractivos y realistas.
- Las nuevas versiones de estos programas combinan la sección geométrica con la hoja de cálculo y con las gráficas de funciones.
- La incorporación de interruptores que posibilitan que mostremos u ocultemos ciertas partes de la construcción según nos interese que estén o no a la vista.

3.4. Traducción Mecanismo - Geometría (Dinámica).

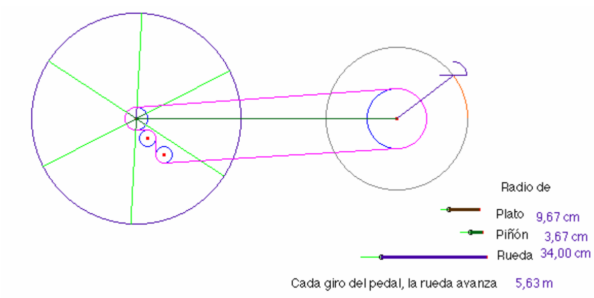
Una de las características de los mecanismos es que en la mayoría existe un elemento motriz o pieza con la que iniciamos el movimiento y otra encargada de ejecutar el trabajo marcado. Entre ellas tenemos un conjunto de elementos, que se van a encargar de la transmisión de los movimientos desde el impulsor hasta el seguidor. Este esquema de trabajo se adapta a la perfección a la filosofía de Cabri II y de GeoGebra, con ellos es relativamente sencillo situar un punto sobre la pantalla de dibujo, que se mueva libremente o sujeto a ciertas condiciones, y crear otros a partir de él, nuevas figuras a partir de estos puntos, y así sucesivamente. Al mover los objetos iniciales, todo el sistema se transforma con ellos. En el ejemplo del freno hidráulico, el movimiento del punto P en el arco XY, hace que la barra roja contacte con la negra en el punto Q y presione sobre el émbolo (rectángulo naranja), que se desliza por el interior del cilindro (rectángulo grande).



El movimiento de estos sistemas nos permite ver el mecanismo en acción y analizar las partes que lo componen, los polígonos implicados, cómo se relacionan, la región del plano por la que podrán desplazarse ciertos elementos o las distintas velocidades de las piezas en movimiento.

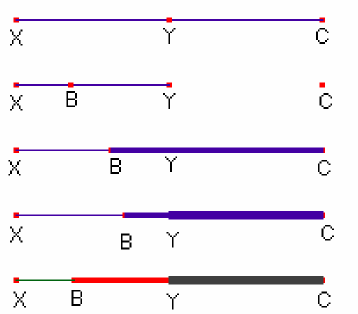
3.5. Introducción de parámetros variables.

Para facilitar el estudio de los sistemas, en algunos de los diseños se ha cuidado de dejar algunos parámetros variables para que puedan ser manipulados por el usuario, con el fin de que pueda captar mejor el funcionamiento del mecanismo. Por ejemplo, en el diseño de la transmisión de la bicicleta, podemos modificar el radio del plato, el del piñón y también el tamaño de la rueda. Una vez establecidas las dimensiones podemos observar el movimiento del sistema y obtener algunos cálculos como el desplazamiento de la bicicleta cada vez que damos una vuelta completa de pedal.



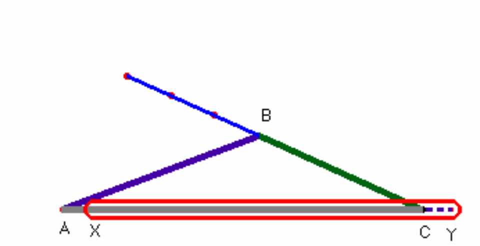
3.6. Creación de macros y nuevas herramientas

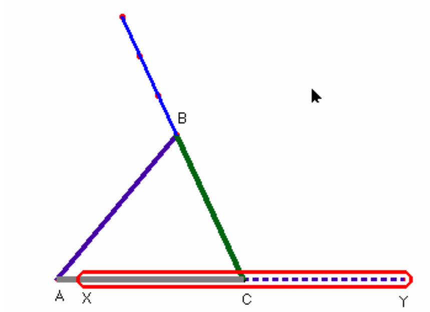
Con las macroconstrucciones o procedimientos con los que “enseñamos” al programa a realizar ciertas construcciones que, una vez diseñadas, podemos utilizar en el momento en que las necesitemos. A partir de un segmento podemos realizar el proceso de construcción de un cilindro hidráulico. Una vez diseñado se almacena como un archivo para utilizarlo como una herramienta más: dados dos puntos, dibujará los segmentos que se ven en la figura y simulan una barra roja que se puede introducir en otro negro como lo hará un cilindro dentro de otro.



4. Las construcciones.

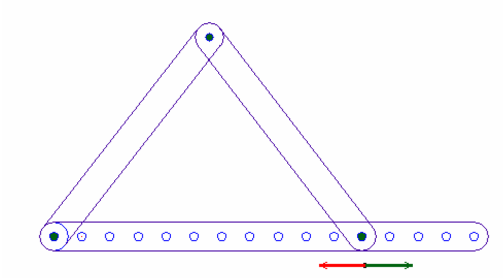
4.1. El gato elevador.





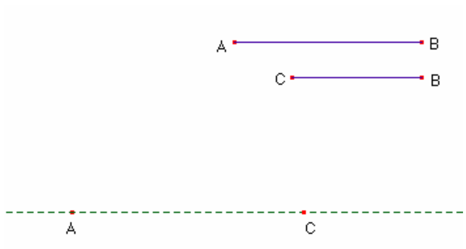
El gato elevador está formado por tres barras articuladas que forman un triángulo, en el que la base es de longitud variable y los otros dos lados tienen longitud fija. Cuando alargamos o acortamos la base, hacemos que el tercer vértice se sitúe a distintas alturas:

Las construcciones geométricas admiten multitud de enfoques y grados de aproximación y profundización. Queremos montar un triángulo articulado con dos varillas de longitud fija y una tercera que se pueda alargar o acortar. Si utilizamos tiras de cartulina, nuestra preocupación será estudiar la forma de hacer las uniones o la forma de conseguir una varilla extensible.

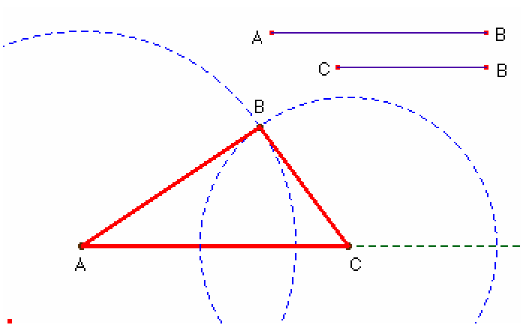


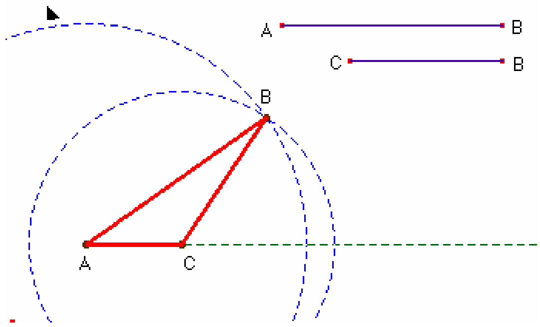
Cuando la herramienta es un programa de ordenador que utiliza puntos, segmentos, polígonos, etc., hay que revisar las relaciones entre los objetos que se relacionan en el sistema para captar los elementos básicos que lo hacen funcionar. El triángulo puede ser visto desde los vértices: uno de ellos es fijo, otro se desplaza por un segmento y el tercero vendrá determinado por los dos segmentos de longitud definida de antemano, es decir, será el punto de intersección de dos circunferencias.

Para una primera aproximación es conveniente que dibujemos previamente las dos varillas de longitud fija AB y BC , un punto A que será fijo y otro C que se puede desplazar –en principio -, sobre una recta que pasa por A.

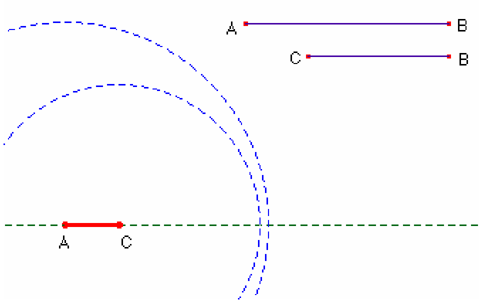


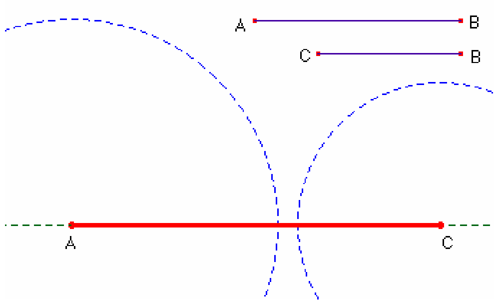
Para obtener la posición del tercer vértice, podemos trazar una circunferencia con radio igual al segmento AB y centro en A. Igualmente, se traza la circunferencia de radio CB con centro en C. El punto B será cualquiera de los dos puntos de intersección de estas circunferencias. Podemos desplazar C a lo largo de la semirecta para obtener los posibles triángulos



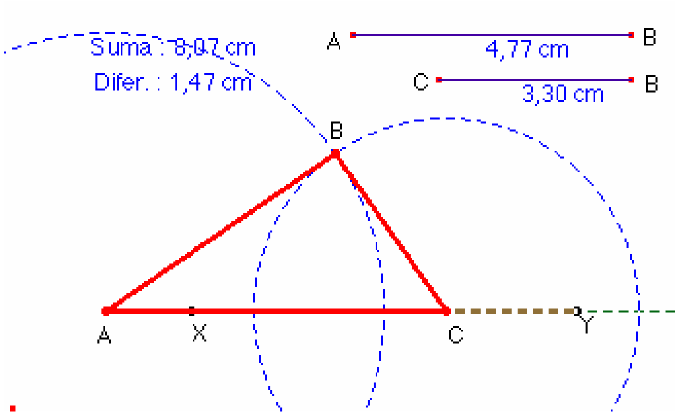


Para investigar la construcción: modificamos las longitudes de los segmentos o la posición de algunos de los puntos que le han servido de base. Aquí empiezan los problemas, porque nos encontraremos con situaciones en las que el triángulo no existe, el motivo es que las circunferencias no tienen intersección.

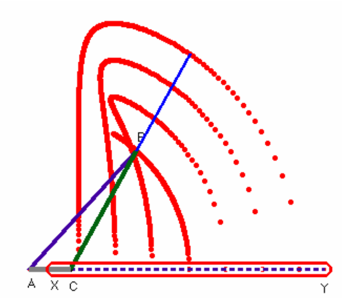




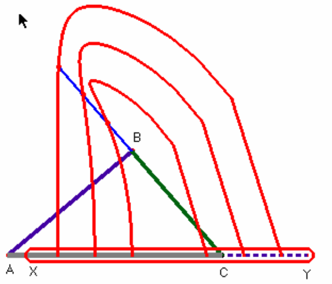
Nos replantearnos la situación para estudiar el conjunto de posiciones sobre las que se puede mover C, para que el triángulo pueda ser construido, es decir, cuando AC está entre AB-BC y AB+BC. Obtenemos dos puntos: X e Y que serán los extremos del segmento sobre el que queremos que se desplace libremente C. Ahora no tenemos más que *redefinir* el punto C para que, en lugar de pertenecer a la semirecta, esté situado únicamente sobre el segmento XY.



Como se ha visto anteriormente, en el gato elevador los desplazamientos horizontales del punto C consiguen que B se sitúe a diferentes alturas. Es más, podemos alargar el segmento BC, y situar sobre él diferentes puntos de apoyo para estudiar las distintas trayectorias que siguen esos puntos cuando C se desplaza sobre el segmento. En el dibujo de la parte superior se ha dejado la *traza activada* de los cuatro puntos marcados sobre el segmento, para analizar

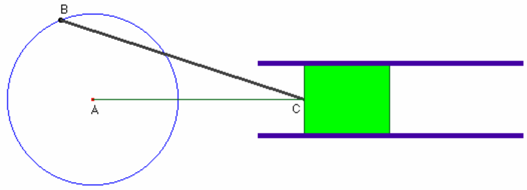


los distintos caminos que seguirán. Otra forma de hacerlo sería con la *herramienta Lugar Geométrico* –el dibujo inferior-, que es especialmente interesante porque los lugares geométricos se transforman automáticamente cuando modificamos las longitudes iniciales de los segmentos, algo que no ocurre con el rastro que deja la traza cuando está activada.

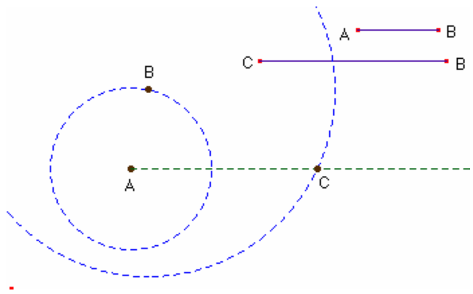


4.2. La máquina de vapor.

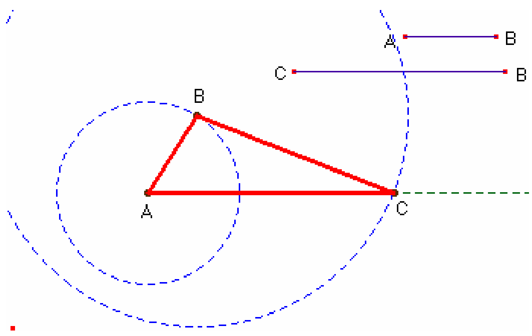
Uno de los ejemplos tradicionales de la relación entre el movimiento de rotación con el desplazamiento en vaivén lo constituye el funcionamiento de la máquina de vapor. Aquí tenemos un triángulo de base variable: cuando B gira alrededor de A, la biela BC transfiere el movimiento a un émbolo, que se mueve por el interior de un cilindro. En la realidad, el punto impulsor es C y su movimiento de vaivén se traduce en un movimiento de rotación de B alrededor de A, pero esta construcción presenta algunos problemas en Cabri y se ha optado por la contraria.

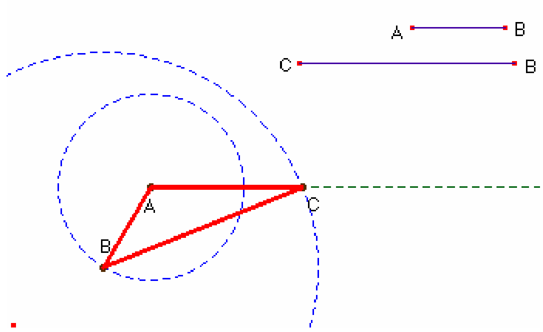


Para analizar el modelo de la máquina de vapor, en lugar de situar el punto C sobre un segmento XY, como en la construcción del gato elevador, hacemos que el grado de libertad del sistema recaiga sobre el punto B. La condición que debemos imponer a este punto es distinta a la construcción del gato. Como el segmento AB tiene longitud fija, B ha de ser un punto situado sobre la circunferencia de centro A y radio AB. Para situar la otra varilla de longitud fija debemos hacer una nueva circunferencia de centro B y radio BC, de esta manera tendremos una circunferencia que corta a la semirecta en el punto C.

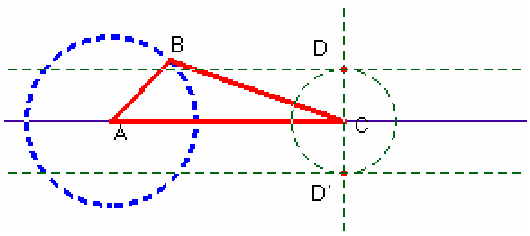


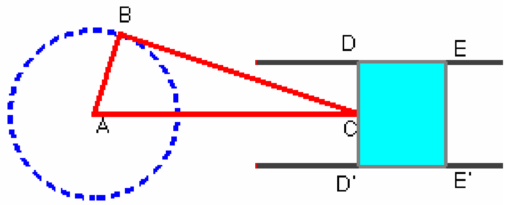
El triángulo de base variable tendrá ahora otra apariencia; un punto B gira alrededor de A e impulsa una biela, uno de cuyos extremos es obligado a moverse por una línea recta.





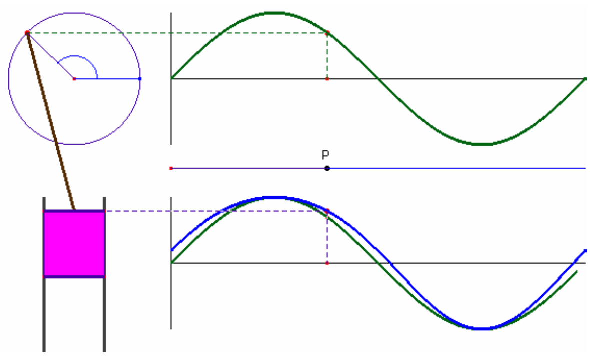
El punto C es el que debe arrastrar consigo el rectángulo que simula el pistón. Uno de los lados del triángulo estará situado sobre la *recta perpendicular* al segmento AC que pasa por C, tomamos dos puntos de esa recta D y D' que estén a la misma distancia de C que serán dos vértices.





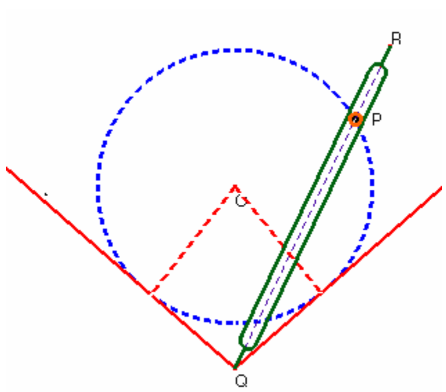
El diseño de la máquina de vapor es útil para profundizar en conceptos matemáticos, como la medida de ángulos y las funciones trigonométricas. Con un punto, que gira alrededor de una circunferencia de radio unidad, es sencillo dibujar la función seno como la medida de la distancia del punto al eje de abscisas.

Podemos utilizar el sistema biela-manivela de la construcción del motor de explosión para estudiar la altura que alcanza el émbolo en el cilindro, y construir la gráfica que determina la posición de este punto cuando da una vuelta completa. Es interesante comparar esta gráfica con la función seno, veremos que hay pequeñas diferencias, algunas de ellas vienen marcadas por detalles que no son fáciles de detectar: en la construcción vemos que tarda más en ir de derecha a izquierda por la parte de arriba que al revés, consecuencia de esto es que la gráfica que indica la posición del cilindro –en azul- esté por encima de la del seno, excepto en dos puntos: $\pi/2$ y $3\pi/2$ que son los únicos en los que ambas coinciden.

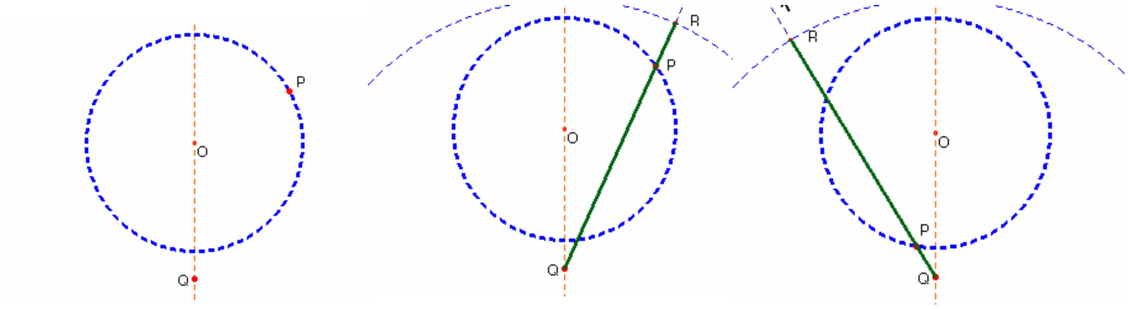


4.3. El mecanismo de brazo oscilatorio.

El mecanismo de brazo oscilatorio se utiliza cuando se desea un movimiento de alimentación lento y retroceso rápido. Ahora tenemos dos puntos fijos O y Q, mientras el punto P se mueve alrededor de O con velocidad constante. La barra QR tiene una ranura en la que está alojado P, de forma que el segmento adquiere un movimiento de vaivén con la característica de que tarda mucho más en realizar el trayecto de ida que el de vuelta. Cuanto más cerca se encuentre el punto Q de la circunferencia, más acusada será esta diferencia.

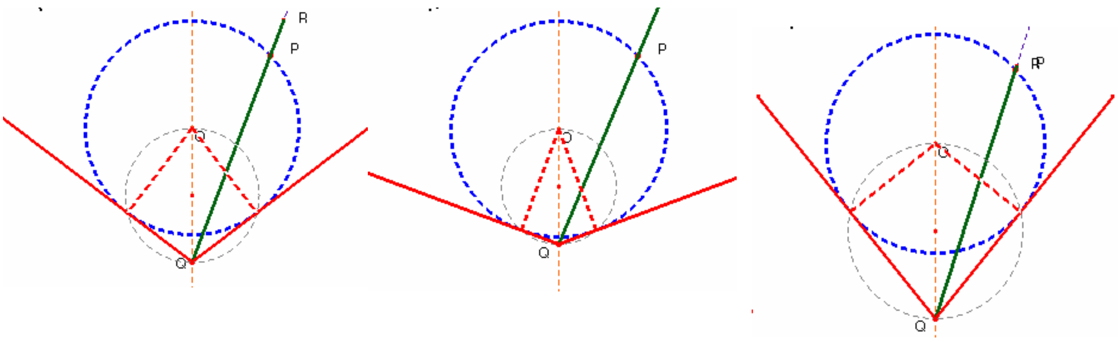


El diseño se inicia con el punto O como centro de una circunferencia sobre la que situamos a P. Situamos el punto Q exterior a la circunferencia aunque próximo a ella. Para dibujar la barra oscilante, trazamos la semirecta que tiene origen en Q y pasa por P. Con una circunferencia con centro en Q dibujamos el segmento QR –en verde-.

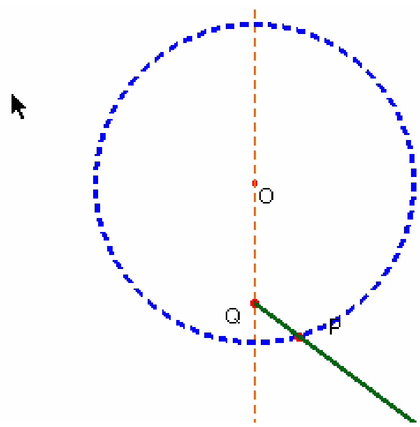


Si queremos marcar los límites en los que se mueve el segmento y los tramos de ida y vuelta, debemos trazar las tangentes a la circunferencia que pasan por Q.

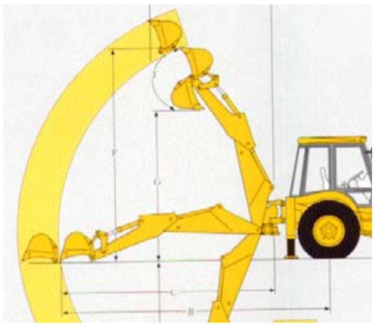
Podemos modificar los tramos de ida y vuelta sin más que mover el punto Q cuando lo acercamos a la circunferencia los puntos de tangencia se encuentran más cerca uno de otro con lo que aumentamos el tiempo que tarda en ir de derecha a izquierda, mientras que si lo alejamos, lo que aumentará es la duración del trayecto de vuelta.



Si hacemos que el punto sea interior a la circunferencia, el segmento ya no hace el movimiento de vaivén, sino que da vueltas completas, aunque el tiempo que el segmento pasa por la parte superior del punto Q es mayor que el que pasa por debajo.

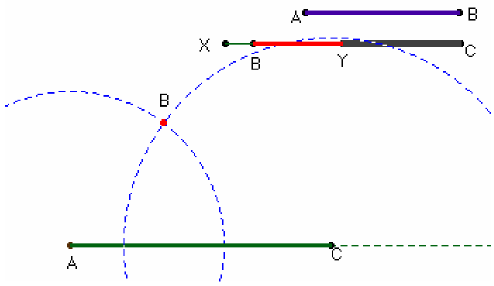


4.4. El cilindro hidráulico.

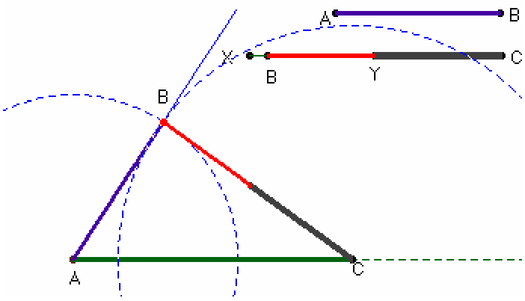


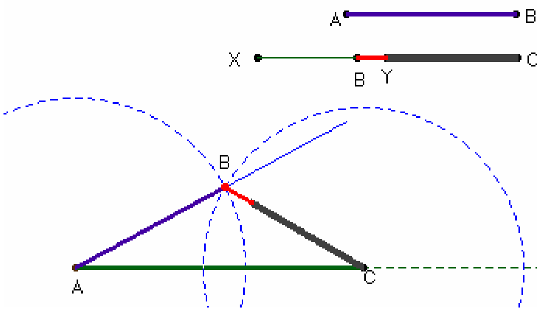
El cilindro hidráulico que se utiliza en volquetes y excavadoras nos sugiere una nueva vía para abordar el triángulo de base variable. Ahora los puntos A y C serán fijos y queremos que la mayor o menor longitud de CB determine la dirección del segmento AB.

La construcción del triángulo que utiliza el cilindro se inicia con los dos segmentos de longitud fija: AB y AC. Si AC es el lado inmóvil, entonces B ha de ser un punto de la circunferencia de centro en A y radio AB. La circunferencia de centro en C y radio CB determina en cada momento la longitud del cilindro hidráulico y uno de los puntos de intersección de estas circunferencias determina el punto B.

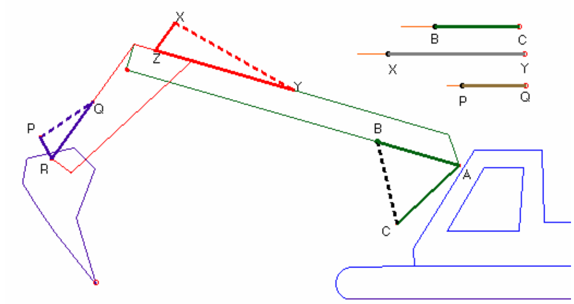


De esta forma ya tenemos el triángulo en el que el vértice B determina la dirección del tercer lado. El sistema se gobierna desde el punto B del segmento CB de la parte superior derecha del diseño, que extrae el cilindro hidráulico hacia el exterior y con ello abre el ángulo CAB o lo introduce en su interior para cerrarlo. Ahora no tenemos más que construir el triángulo y estudiar la relación entre la longitud del cilindro y la medida del ángulo.



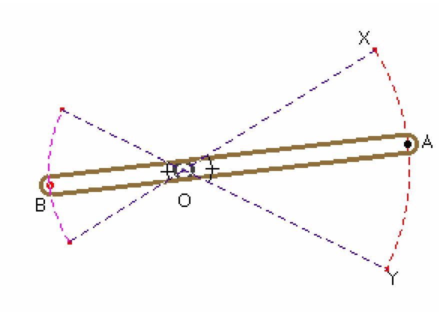


A veces puede ser conveniente combinar dos o más cilindros hidráulicos para conseguir el movimiento deseado como en el brazo articulado de la excavadora que está compuesta por dos barras articuladas, cada una con un cilindro hidráulico - ABC y XYZ -, que modifica su inclinación. Además, incorpora un tercer cilindro PQR para alterar el ángulo de la pala respecto de la barra a la que está sujeta. Con Cabri II podemos gobernar cada uno de los cilindros hidráulicos de la excavadora por separado, como lo haría el operador en la cabina.



4.5. La palanca.

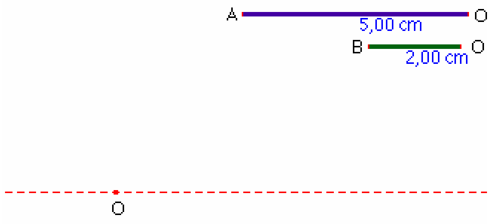
Una barra AB que puede girar alrededor de un punto fijo O es una palanca. Su utilidad se sustenta en que las distancias recorridas por A y por B sobre los arcos, dependen únicamente de las longitudes OA y OB, porque tratamos con arcos de circunferencia trazados con ángulos iguales.



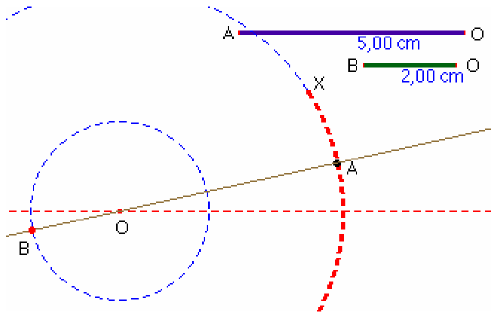
La ley física de la palanca nos dice que las fuerzas aplicadas en los extremos de la barra, son inversamente proporcionales a las distancias respecto del centro de giro. Esto se debe a que el trabajo realizado en los dos puntos ha de ser igual o, lo que es lo mismo, han de ser iguales los productos de las fuerzas aplicadas en cada punto por las distancias desde O a cada punto.

$F_A \times OA = F_B \times OB$ de donde $F_B \;/\; F_A = OA \;/\; OB$

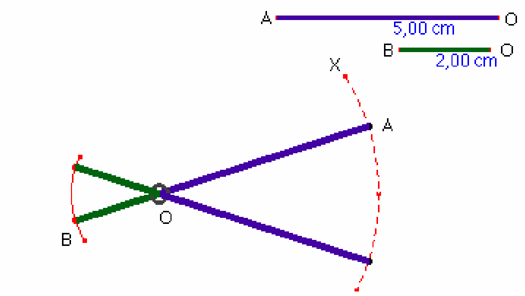
La construcción de una palanca se inicia, como en casos anteriores, con los dos segmentos que contienen las longitudes de los brazos de la barra OA y OB y marcamos el centro de giro O.

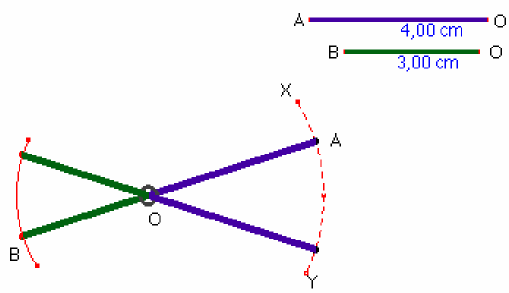


Si tomamos el punto A como el impulsor y B como seguidor, ambos estarán situados sobre arcos de circunferencia con centro en O, que podemos situar sobre las circunferencias dibujadas con el compás. Colocamos primero A sobre el arco XY y trazamos la recta que pasa por O y A, B será el punto de intersección de esta recta con la otra circunferencia.



El arco sobre el que se mueve B se puede marcar como el lugar geométrico del punto B, cuando A toma posiciones distintas sobre el arco XY. Después de esto podemos modificar los brazos de la palanca, cuando sea necesario, con sólo desplazar A y B.

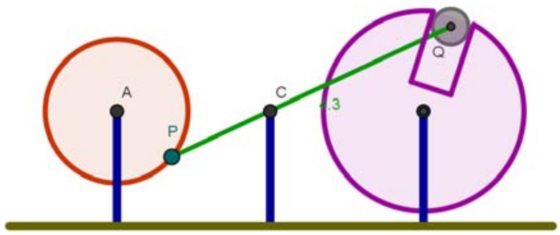




4.6. Combinar dos triángulos.

En esta sección se presentan algunos mecanismos que utilizan la combinación de dos triángulos (uno de ellos con un lado de longitud variable), para transformar un movimiento en otro. En muchos casos se trata de convertir el movimiento de rotación de un punto (manivela) en el deslizamiento de otro, que se traslada según unas guías. Esta transformación se realiza con una barra articulada en sus extremos (biela).

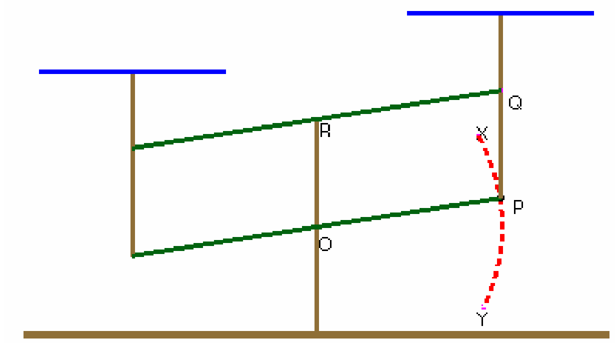
También tenemos ejemplos de la transformación de un movimiento de rotación en otro movimiento también de rotación en el mecanismo de disco acoplado y de la combinación de dos mecanismos de brazo oscilatorio en el banco de carpintero.



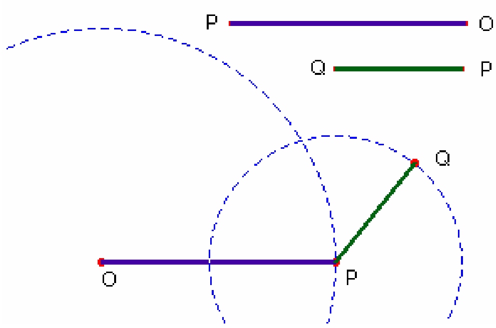
La mayoría de estos diseños están inspirados en el libro de Artobolevski, que expone un exhaustivo listado de mecanismos que es posible tranducir a los diseños de Geometría Dinámica.

4.7. El paralelogramo articulado.

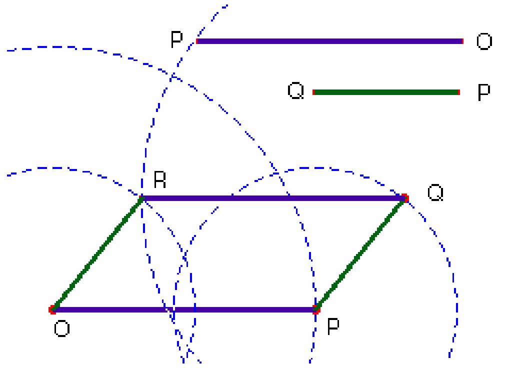
El paralelogramo es el cuadrilátero que tiene las varillas opuestas de la misma longitud. Lo utilizamos cuando queremos que se mantenga el paralelismo en diversas partes del sistema. Tenemos un ejemplo en la balanza, en la que es necesario que los platillos siempre se mantengan horizontales, para que no caigan los objetos que depositamos en ellos.

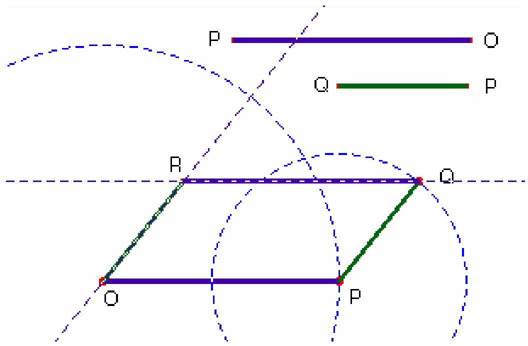


La construcción comienza por dos varillas de distinta longitud: OP y PQ. Si O es un vértice del paralelogramo, el siguiente P puede ser cualquier punto de la circunferencia de centro en O y radio OP. El punto Q lo situamos sobre la circunferencia que se dibuja al hacer compás en P con radio PQ.



Este montaje tendrá dos grados de libertad: en P y en Q, aunque normalmente la barra OP se mantiene fija y es Q el que provoca el movimiento en el sistema. El punto R vendrá determinado por la intersección de dos circunferencias o bien por el paralelismo de los lados.

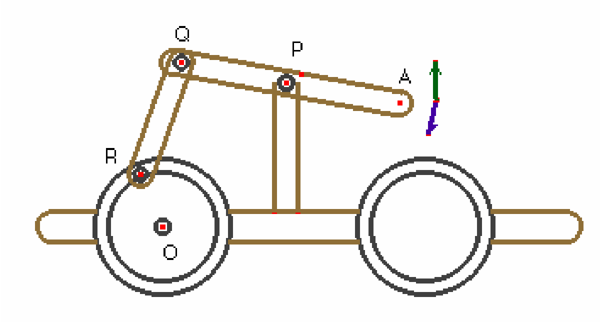


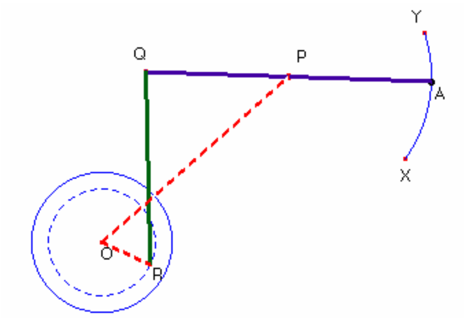


A partir de aquí podemos utilizar uno de los lados para construir otro paralelogramo articulado, lo que provocará un efecto multiplicador del movimiento, como ocurre en el pantógrafo y en las pinzas extensibles, o bien colocar dos paralelogramos formando un ángulo fijo, como en la barquilla de reparación del alumbrado.

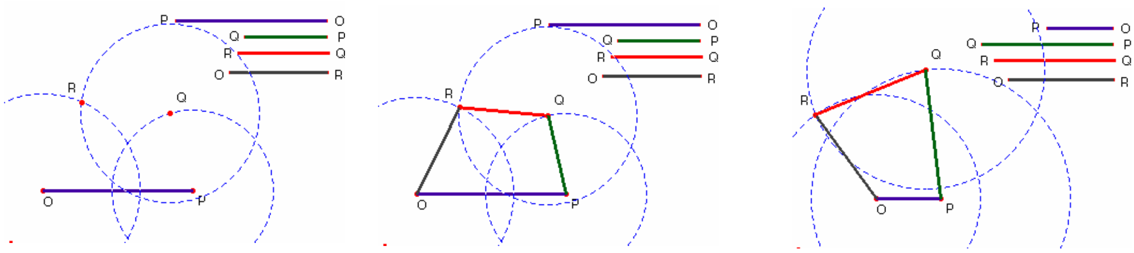
4.8. El cuadrilátero articulado.

El cuadrilátero articulado está formado por cuatro varillas de distinta longitud unidas por sus extremos. Suele tener un segmento fijo OP -bastidor-, y el resto de las varillas son móviles. Se utiliza para transformar un movimiento de rotación en otro de vaivén, y al contrario. El dibujo y el esquema pertenecen al mecanismo de funcionamiento del trole. El punto A se mueve sobre un arco arriba y abajo, acciona en Q el movimiento del cuadrilátero OPQR para que el punto R y con él la rueda entera, giren alrededor de O y el trole avance.



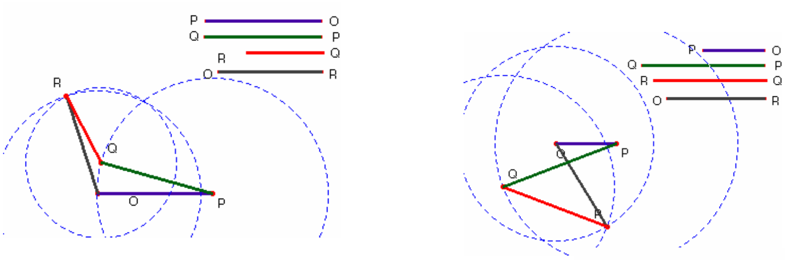


La construcción del cuadrilátero articulado con Cabri II parte de los cuatro segmentos dibujados previamente, uno de los cuales OP será el bastidor. Q será un punto cualquiera de la circunferencia de centro P y radio PQ, mientras que R será el punto de intersección de dos circunferencias: la de centro en O y radio OR y la de centro en Q y radio QR.

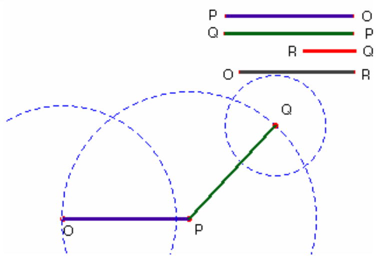


La construcción previa de las cuatro barras que después se articularán, favorece el estudio posterior, al permitir que variemos las condiciones iniciales desde el exterior del dibujo. Cuando alargamos o acortamos cualquiera de los segmentos dibujados, modificamos toda la construcción con las nuevas condiciones.

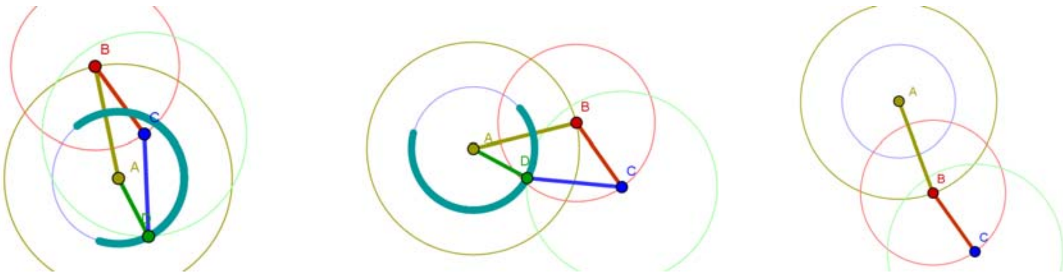
Al haber construido el cuadrilátero con varillas articuladas, pronto surgen figuras que no suelen aparecer sobre el papel, como los cuadriláteros cóncavos –a la izquierda-, y también otros cruzados –a la derecha-, que hacen surgir las dudas acerca de si serán o no polígonos. Hay un interesante articulo de D. Crawforth (1988) en el que expone el aprovechamiento didáctico de esta situación.



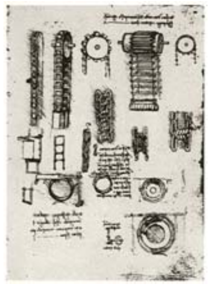
Además, encontramos situaciones en las que el cuadrilátero deja de existir, es decir, no se puede construir con las condiciones planteadas. El caso más evidente se produce cuando uno de los lados es mayor que la suma de los otros tres, pero hay otros.



La herramienta *Lugar Geométrico* facilita el estudio para averiguar en qué condiciones podemos construir un cuadrilátero, y cuándo no será posible hacerlo. En los siguientes ejemplos tenemos el lugar geométrico del punto D –e trazo verde grueso-, cuando A es fijo y B toma tres posiciones distintas. En el tercer caso no hay ninguna posición válida para el punto D en las condiciones planteadas.

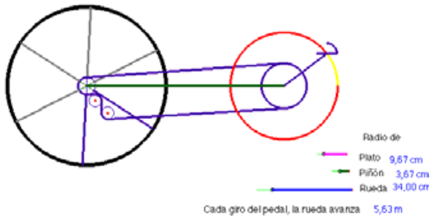


4.9. Engranajes y correas de transmisión.

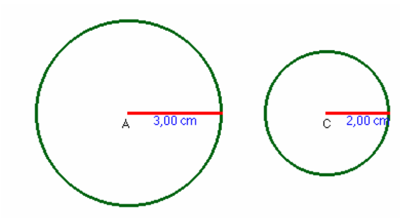


La utilización de engranajes y ruedas dentadas tiene más de dos mil años. En el siglo XV Leonardo da Vinci realizó diseños de engranajes y un prototipo de bicicleta.

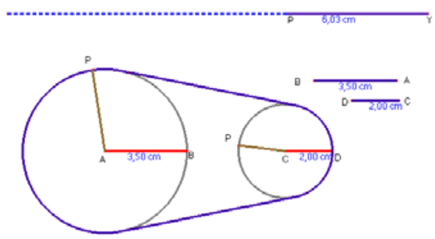
Actualmente engranajes y correas de transmisión están presentes en muchas actividades: poleas y polipastos para elevar cargas pesadas, y en todo tipo de sistemas para el cambio de marchas, que facilite la transmisión del movimiento.



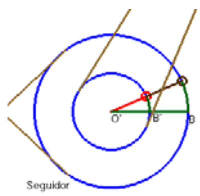
El diseño de poleas con ordenador ha de estudiar la forma de trasladar a las imágenes el problema físico-matemático del factor de transmisión. En el caso más sencillo tenemos dos ruedas conectadas por una correa. La cantidad de vueltas que da una respecto de la otra depende únicamente de las longitudes de esas circunferencias o, lo que es lo mismo, de sus radios. En la figura, cuando la rueda de la izquierda dé dos vueltas, la de la derecha habrá dado 3.



Para simular el movimiento de las ruedas (la motriz de radio b y la seguidora de radio a) dibujamos dos radios móviles que realizan el movimiento de rotación. Consguimos que el movimiento aparente de una respecto de la otra se parezca a la realidad por medio de un deslizador angular α que gira de 0º a 360º. En la rueda motriz (radio=b) hacemos la rotación del punto un ángulo α mientras que la rueda seguidora (radio=a) debe realizar una rotación (b/a)*α.

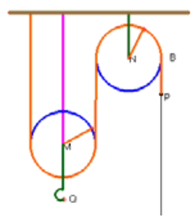


Dos dificultades adicionales que han surgido en los diseños de este capítulo son:



- El caso de las circunferencias concéntricas de diferentes radios, que se mueven solidariamente y cada una de ellas está unida otras.

- El desplazamiento de las poleas móviles en los polipastos hace que la misma circunferencia se desplace hacia arriba o abajo a la vez que gira.



5. Bibliografía.

Achón i Massana, J. El mecano: un recurs pedagògic. (Dossiers Rosa Sensat núm 19: Barcelona)

Artobolevsky I.I. (1979). Mecanismos en la técnica moderna. (6 vol.). Mir: Moscú

Bolt, A. B. y Hiscocks (1970). Machines, mechanims and mathematics. Mathematics for the Majority Project. Chatto & Windus. The School Council. London.

Bolt, B. (1992). Matemáquinas. La matemática que hay en la teconología. Labor: Barcelona.

Crawforth, D. (1988). ¿Qué es un cuadrilátero?. (En Walter M. ed. Geometry. M.E.C.: Madrid).

Cundy, H. M. et Rollet, A. P. (1978). Modèles mathematiques. CEDIC:Paris

D'Arcy Thompson. (1980). Sobre el crecimiento y la forma. Ed. Blume. Madrid.

Kozhevnikov, S.N. Mecanismos. Gustavo Gili. Barcelona.

Mora, J.A. (1996). Máquinas y matemáticas. Actas del 8º I.C.M.E. Sevilla

Mora, J.A. (1997). De la calle al ordenador. Revista Aula de Innovación Educativa, núm. 58. Enero de 1997 pp. 20-21.

Mora, J.A. (1998). Matemáticas con Cabri-Geomètre II. Proyecto Sur. Granada.

O'Daffer P. Y Clemens S. (1977). Geometry: an investigative approach. Addyson-Wesley: California.

Williams, C. (1984). Los orígenes de la forma. Gustavo Gili. Barcelona

Otros materiales utilizados:

J.C.B. Maquinaria. Valencia

Joal Compact. Juguetes y Herrajes. Ibi. Alicante

Albert Lucas, R. Museo del Cáñamo de Callosa de Segura. Alicante.

Direcciones de internet consultadas:

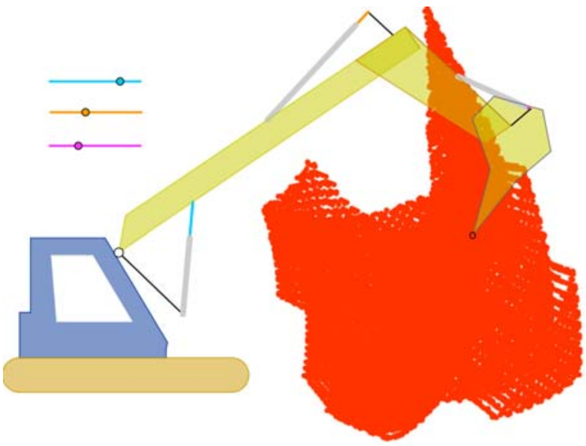
Leonardo da Vinci. La bicicleta e l'automobile. Studio del Professore Augusto Marinoni. http://rcl.nemo.it/reteciv/cultura/arte/leon/indice.htm

Museo Leonardiano di Vinci. http://www.leonet.it/comuni/vincimus/invimus.html

6. Colaboradores

Los colaboradores en la web *Matemáquinas, la Geometría de los Mecanismos* son:

María Teresa Gómez
Ignacio Baeza,
Francisco Jesús García,
Salvador Caballero,
Floreal Gracia,
Fernando Juan,
Alfred Mollà,
Onofre Monzó,
Pascual Pérez,
Tomás Queralt,
Julio Rodrigo,
Bartolomé Sintes,
José Manuel Arranz,
Rafael Losada,
Tomás Recio y
Manuel Sada.



Excavadora de Rafael Losada par el CVG

Se ha dejado el rastro del extremo de la pala para analizar
el recorrido que realiza (la envolvente de trabajo de la máquina)