Los Recursos Didácticos en el aprendizaje de la Geometría

José Antonio Mora Sánchez
Centre de Professors d'Alacant

En este artículo se analiza la introducción de los recursos didácticos en las clases de matemáticas, utilizando una doble línea argumental. En el texto central se plantea el por qué, para qué y cómo utilizar este tipo de materiales, y se ofrece un listado de recursos para el aprendizaje de la Geometría, una bilbiografía y direcciones de interés. Paralelamente se expone una serie de experiencias con un material concreto para el estudio de los polígonos: las varillas de mecano . Las dos lecturas son independientes aunque complementarias y se puede comenzar por cualquiera de ellas aunque la parte más práctica, la titulada Varillas, ha sido la primera en ser redactada.

Uno de los cambios más señalados en el currículo de las matemáticas escolares, tanto en la Educación Primaria como en la Secundaria, es la recuperación de la Geometría para conseguir un mejor conocimiento del espacio y como fuente de modelos y situaciones problemáticas para el aprendizaje de las matemáticas.

Se considera que la Geometría es especialmente importante en edades en las que es necesario experimentar sobre objetos reales, con la finalidad de desarrollar las capacidades de los estudiantes. Algunas de las dificultades para la introducción de estos planteamientos provienen de la falta de tradición geométrica en las matemáticas escolares: de la geometría euclídea de los años 50-60 se pasa al vacío geométrico de la matemática moderna. Desde la perspectiva de los libros de texto producidos en las dos últimas

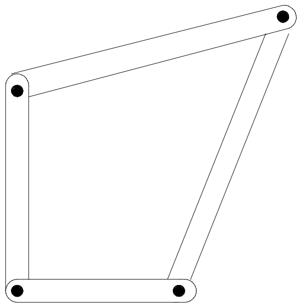
Varillas

VARILLAS DE MECANO.

En esta sección se relatan algunas experiencias con la utilización de un recurso didáctico como las Varillas en varias clases con estudiantes de los últimos cursos de Primaria y los de Secundaria Obligatoria.

Podemos encontrar las varillas comercializadas por algunas empresas de material didáctico con el nombre de *Listones Geométricos* y en juguetes como parte del *Mecano*. También se puede fabricar artesanalmente en clase con láminas de cartón duro o plástico. Se cortan tiras de 1 cm de ancho y varias longitudes que se agujerean en los extremos con el taladro de papel. Las tiras se unen unas a otras con pasadores sujetapapeles.

Varillas

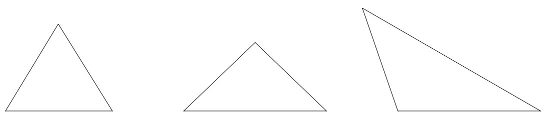


1. Primer trabajo. Triángulos.

¿Cuántas clases distintas de triángulos podemos construir con tres varillas unidas por los vértices?.

El trabajo de construcción de los primeros triángulos hace que aparezcan las primeras preguntas: ¿qué significa clases distintas?, ¿qué criterios se eligen para clasificar?.

Normalmente los estudiantes ya han estudiado alguna clasificación en cursos anteriores, y recuerdan nombres de triángulos asociados a su forma, aunque no siempre de forma correcta. Esto ayuda a que vayan obteniendo una colección de triángulos "familiares". Los primeros en aparecer son el equilátero y algún que otro isósceles y escalenos.



Es interesante que investiguen figuras que pertenecen a dos clases; por ejemplo, el obtusángulo-isósceles o el rectángulo-equilátero. Otra forma de provocar el debate consiste en proporcionar tres varillas que no formen triángulo ($a+b<c$).

A partir de este trabajo podemos introducirnos en el estudio de una de las propiedades fundamentales de los triángulos: su rigidez y las aplicaciones prácticas que de ella se derivan: construcción, estructuras, armazones, etc. La rigidez de los triángulos resalta más si les pedimos ahora que construyan cuadriláteros con las varillas. Las aplicaciones técnicas vendrán ahora del movimiento

décadas, la geometría ha ido desplazándose hacia el final de los libros en primaria para desaparecer en secundaria.

La opción elegida para el nuevo Sistema Educativo ha sido la de un currículo abierto que ofrezca un amplio margen de libertad a los centros y al profesorado. El grado de libertad es amplio, siempre y cuando dispongamos de los materiales y los medios adecuados para cubrir la distancia entre lo legislado y la práctica del aula. De no ser así corremos el riesgo de quedarnos en un cambio de nombres sin transformar las prácticas educativas.

El papel de mediador entre el curriculum pretendido y el real lo ha ejercido el libro de texto. Esto puede ser válido en una concepción de la enseñanza en la que *hay que decir al profesor exactamente lo que ha de hacer, si es posible en cada momento,* como ironiza D. Fielker refiriéndose al sistema educativo francés "donde, al menos hasta hace poco, el Ministro de Educación podía mirar su reloj y decir lo que estaban haciendo en el colegio los niños de cada edad".

POR QUÉ LOS RECURSOS.

Al considerar al/a la estudiante como el sujeto central de su aprendizaje, que construye el conocimiento a partir de la reflexión derivada de su propio trabajo, el libro de texto se revela insuficiente. Su concepción estática no le permite dar respuesta a todas las relaciones dinámicas que se establecen entre estudiantes, profesor/a y conocimiento matemático.

Los nuevos diseños curriculares de matemáticas resaltan que el aprendizaje de las matemáticas tiene su base en el trabajo colectivo para la resolución de problemas y la realización de investigaciones a partir de la exploración de materiales variados. El cambio es mucho mayor de lo que puede parecer a simple vista, ya que lo que hasta ahora podría parecer una cuestión de elección del profesor -opción metodológica-, ahora se ha convertido en un objetivo de aprendizaje. L. del Carmen y A. Zabala (1992) afirman: "podemos sustituir la vieja cuestión de si son convenientes o no por la de cómo podríamos hacerlo mejor".

P. Adam (1956) presenta dos argumentos a favor de la utilización de los recursos. El primero proviene de la motivación: "el interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa con la parte activa que toma él mismo en su adquisición": el segundo entra en la construcción de los conocimientos: "La acción no es sólo una necesidad vital del niño (...), sino que desde el punto de vista epistemológico es esencial en la formación del pensamiento mismo". Esto tiene especial relevancia en matemáticas porque se trabaja con abstracciones que en principio parten -o pueden partir-, de situaciones reales.

Emma Castelnuovo apoya la idea de recurso como activador del conocimiento, cuando afirma que el propósito consiste en hacer, manejar y construir y hacerlo de forma que, a través de la construcción, el estudiante llegue al descubrimiento. Cuando el estudiante tiene la posibilidad de accionar, el objeto de su atención pasa del material a sus transformaciones. En este sentido podemos decir que el recurso actúa como catalizador de su aprendizaje.

PARA QUÉ LOS RECURSOS.

Seymour Papert (1981) señala tres aspectos en la utilización de los recursos en el aprendizaje:

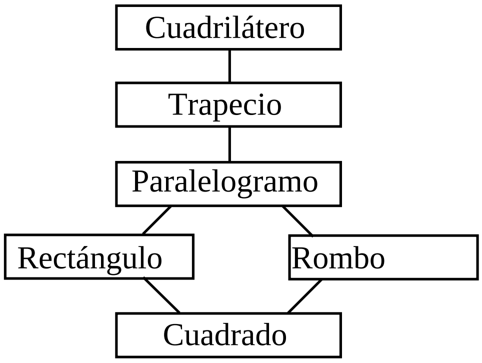
*Sirven como modelos, a los que las ideas matemáticas pueden asociarse. S. Papert formula como un hecho fundamental del aprendizaje: "cualquier cosa es fácil si uno puede asimilarla a su propia colección de modelos". Él mismo se pone como ejemplo en su aprendizaje de las tablas de multiplicar a partir de la experiencia previa con ruedas dentadas y engranajes.

*Contribuyen a dotar a las matemáticas de una tonalidad afectiva positiva. Con la utilización de los recursos apropiados es más fácil crear condiciones, en las que puedan arraigar

del sistema cuando una de las varillas se mantiene fija: balanzas, columpios, etc. son muestras de ello.

2. Cuadriláteros. Primera clasificación.

En un primer momento podemos pedir que clasifiquen los cuadriláteros sin utilizar materiales. Después de un tiempo encontraremos algo parecido a:

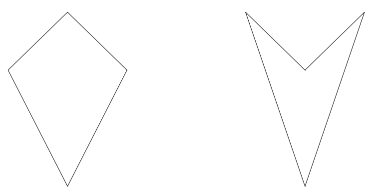


En este trabajo surgen datos reveladores de la forma de trabajar de los estudiantes:

*Aparecen nombres como el de *trapezoide* para el cuadrilátero que no es trapecio, es decir, el que no tiene lados paralelos. Algo parecido ocurre con el romboide que algunos aplican al paralelogramo. Esto da pie al debate sobre la forma en que las matemáticas definen los conceptos: normalmente se atiende a las cualidades que poseen las figuras, no a las que carecen. No parece relevante tener un nombre para un tipo de cuadrilátero cuya única característica reseñable es <u>no tener</u> lados paralelos.

*Hay una fuerte resistencia a la aparición de cuadriláteros cóncavos.

*Sólo se piensa en aquellos cuadriláteros para los que se tiene nombre. Hay algunos como:



Varillas

que, cuando se les pide que los nombren, los llaman: *cometa* al primero y *punta de flecha* o *boomerang* al segundo.

*La clasificación lleva aparejada un dominio de los conceptos implicados que va más allá de recordar la definición, es necesario que se convierta en un valor de uso para dirimir cuestiones como: ¿todos los cuadrados son rombos?, ¿todos los rombos son cuadrados?, o ¿son trapecios los paralelogramos?. Preguntas que llevan a ardientes discusiones y que, para encontrar respuestas satisfactorias hay que profundizar en la definición.

Esto vuelve a introducirnos en el problema de cómo definir en matemáticas. Cuando algunos libros intentan definir rombo, hablan de un cuadrilátero con cuatro lados iguales, pero añaden el que tenga los ángulos iguales dos a dos -lo que resulta redundante-, o el que las diagonales sean de distinta medida, con el fin de trazar una línea de separación entre los rombos y los cuadrados.

3. Criterios de clasificación.

Del trabajo anterior podemos extraer una colección de criterios que son los utilizados más o menos conscientemente para la clasificación:

*Pares de lados paralelos.
*Pares de lados iguales.
*Cantidad de ángulos rectos.

Una forma de continuar el trabajo es la reflejada por D. Fielker (1987) con las clasificaciones obtenidas al cruzar estos criterios dos a dos:

		Pares de paralelos		
		0	1	2
Pares de iguales	0			
	1			
	2			

los modelos intelectuales.

*Vinculan el conocimiento formal de las matemáticas con el conocimiento corporal, con los esquemas sensorio-motores del estudiante.

En una concepción constructivista del aprendizaje, las personas necesitan de experiencias y modelos sobre los que sustentar los conocimientos que adquieren. Mediante la manipulación, el estudiante adquiere una percepción más dinámica de las ideas.

Otro argumento que apoya la utilización de los recursos didácticos proviene de la dificultad de las matemáticas. Los conceptos matemáticos son difíciles y normalmente no es posible captarlos completamente la primera vez que se nos presentan. Por regla general se necesitan varias aproximaciones y desde diversas perspectivas para comprender los conceptos, ponerlos en relación con otros conocimientos, utilizarlos con confianza y poder generar nuevos conocimientos a partir de ellos.

ALGUNAS IDEAS ACERCA DEL CÓMO.

La utilización de recursos didácticos, aunque no sea una opción metodológica, tiene importantes implicaciones en el desarrollo de la clase y las relaciones que se establecen en ella.

La introducción de un nuevo recurso en las clases de matemáticas modifica el equilibrio conseguido hasta el momento, sobre todo si es la primera vez que se utiliza material manipulativo. Cuando el profesor o la profesora lleva las varillas a clase, considera que el ritmo de trabajo se hará más lento e intenta sentar las bases del trabajo cuanto antes para cubrir las primeras etapas con rapidez.

En una de las experiencias del trabajo con varillas, el primer día había un par de estudiantes situados al fondo de la clase, sin hacer caso de las propuestas del profesor, estaban inmersos en sus propias construcciones. El profesor siente la inclinación de impedir este tipo de actividad creativa, por considerarla una pérdida de tiempo que le impide avanzar en el guión previsto para la clase. En aquel caso les llamó la atención varias veces, pero, hasta que no construyeron la figura de una casa con las varillas, no atendieron a sus propuestas de trabajo. A partir de ese momento ya no hubo ningún problema.

Un caso parecido ocurrió en otro curso en el que se trabajaba manipulativamente con polígonos para formar mosaicos. Consciente de la necesidad de un tiempo de adaptación al material, el profesor había diseñado una primera tarea consistente en construir varias figuras de las que sólo se daba el contorno, utilizando polígonos regulares. A pesar de eso, un estudiante interesado por los logotipos, realizó algunos diseños:

que nada tenían que ver con la propuesta del profesor aunque, si lo pensamos mejor, el objetivo didáctico también se había conseguido. En esta primera fase de reconocimiento de un nuevo material, parece como si muchos estudiantes necesitaran "desfogarse" y plasmar con él las cosas que les rondan por la cabeza, ya sea una casa o un logotipo. Una vez satisfecha esta ansiedad inicial de reconocimiento, los estudiantes trabajan con menos interferencias.

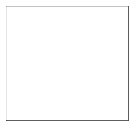
La duración de esta fase disminuye con la edad, pero aún más con la utilización frecuente de recursos didácticos.

Puig Adam aporta su visión acerca del problema del tiempo escolar: "El inconveniente más grave es, sin duda, el tiempo consumido en la confección del modelo. No es de despreciar el tiempo del alumno en esta época tan sobrecargada de trabajo y de acumulación de programas. Desde el punto de vista matemático, este tiempo se dará siempre por bien empleado si la actividad reflexiva y creadora domina sobre la estrictamente manual".

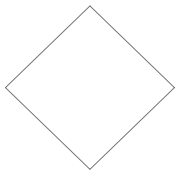
para encontrar los cuadriláteros apropiados en cada caso -en caso de que existan-. Después habría que continuar con las clasificaciones cruzadas que relacionan los pares de lados iguales con la cantidad de ángulos rectos, así como los ángulos rectos con los pares de lados iguales.

4. De nuevo con varillas.

Si retomamos ahora la manipulación de las varillas, nos facilitará mucho el trabajo y, lo que es más importante, hace aflorar nuevas preguntas. Algunas de ellas se refieren a las imágenes mentales de las figuras geométricas que poseen los estudiantes. En una clase con niños y niñas de 10 años el profesor presentaba el cuadrado con cuatro varillas:



y les preguntaba por su nombre: cuadrado. Inmediatamente y sin modificar la forma, giraba las manos para que los/as estudiantes vieran:

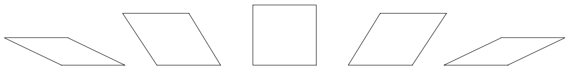


rápidamente y por unanimidad, ya nadie veía el cuadrado, ahora es un rombo. Si volvía a girar la figura, repetían cuadrado, y así estuvieron pasando del cuadrado al rombo y del rombo al cuadrado durante un buen rato, a pesar de que el profesor les advertía que él no estaba cambiando la forma para que cada vez que cambiaba la orientación implicara una figura y un nombre distintos.

Las varillas proporcionan una visión dinámica de las figuras geométricas, con la que no pueden competir las imágenes estáticas del libro o la pizarra. Otros debates inte-

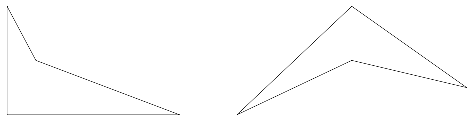
Varillas

resantes provienen de la carencia de rigidez de los cuadriláteros. Con cuatro varillas iguales podemos construir:

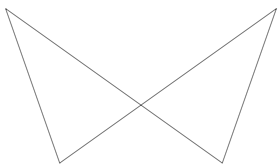


aquí también muchos niños y niñas dirán: rombo, rombo, cuadrado, rombo, rombo. En cursos posteriores podemos aprovechar para estudiar comparaciones entre el perímetro y el área de estas figuras y relacionarlo con el ángulo.

Los cuadriláteros cóncavos tardan en aparecer:



y a veces llevan a situaciones extrañas cuando, fruto de la manipulación aparece:



Cuestionarse si esa figura es o no un cuadrilátero provoca acalorados debates entre los partidarios de acogerlos como cuadriláteros aunque un tanto extraños, y los que se niegan a admitirlos, pero ni unos de otros encuentran argumentos que convenzan a sus oponentes, a pesar de la firmeza de sus posiciones. La definición escolar de polígono como línea poligonal cerrada -o región del plano encerrada por ella-, no es de gran ayuda. Por otra parte, las definiciones más rigurosas de las matemáticas quedan fuera del alcance de los estudiantes.

Lo interesante aquí no es la conclusión a la que se llegue, sino el talante con el que se afronta la situación, la riqueza de los debates que se entablen entre los estudiantes y el aprendizaje matemático provocado en los estudiantes, como lo señala D. Crawforth (1988)

La utilización de recursos obliga a trabajar en grupos tanto por problemas de cantidad de material -no hay suficiente para que cada estudiante trabaje individualmente-, como de espacio e incluso la imposibilidad de que el profesor atienda a todos los estudiantes individualmente. Esto, lejos de ser un inconveniente, podemos convertirlo en un factor que influya positivamente en el aprendizaje de los estudiantes.

La organización de la clase ha de favorecer el intercambio de ideas entre el profesor y los estudiantes y entre los mismos estudiantes que han de exponer argumentos para explicar sus ideas, convencer a otros, confrontar opiniones y atender a perspectivas distintas a la propia.

La interacción entre los estudiantes es más fructífera que la que se da entre profesor y estudiantes. Por una parte, se da sin la mediación de la autoridad moral o intelectual del profesor y esto redundará en la autonomía de los estudiantes. Por otra, cuando un estudiante tiene que defender sus soluciones ante sus compañeros, habrá de clarificar mejor sus ideas y organizar su pensamiento de forma más coherente y precisa.

El juego es un tipo muy especial de recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas porque dan al estudiante una razón propia para hacer matemáticas y , lo que es más importante, porque la retroalimentación no proviene de las correcciones del profesor, sino de los compañeros y de uno mismo. Los estudiantes comprueban mutuamente su pensamiento y aprenden que pueden pensar por sí mismos.

El papel del profesor también ha de ir transformándose, de ser el que posee las respuestas, pasa a diseñador de las actividades de aprendizaje, a ser el que anima y dirige los trabajos de los estudiantes, el que modera y coordina los debates. Es el que recoge las preguntas que hay en el ambiente de la clase y las transforma para ponerlas al alcance de la mayoría de los estudiantes. Aporta ideas, pero no da soluciones y contribuye a crear la conciencia en la clase de que son los estudiantes los que saben y los que tienen respuestas para los problemas planteados.

C. Kamii (1985) resume de forma gráfica este estilo de enseñanza cuando relata la conversación entre dos estudiantes mientras trabajaban en la tarea propuesta: "No se lo preguntes a la profesora, te va a responder, ¿y tú, qué piensas?".

P.Halmos (1991) añade: "Lo que se puede enseñar es la actitud correcta ante los problemas, y enseñar a resolver problemas es el camino para resolverlos (...). El mejor método no es contarles cosas a los alumnos, sino preguntárselas y, mejor todavía, instarles a que se pregunten ellos mismos".

Hay una tendencia bastante generalizada entre el profesorado de matemáticas a considerar que la utilización de recursos en las clases corresponde a niños pequeños, como mucho, a estudiantes de bajo rendimiento. Este es un planteamiento que contradice la realidad de muchas clases. Como señala el informe Cockroft (1985), "tan perjudicial resulta insistir en que un estudiante continúe empleando material práctico para un proceso que comprende y puede desarrollar mediante símbolos, como esforzarse por que otro pase a la representación por medio de diagramas o símbolos, cuando aún no está en condiciones de llevar a cabo la tarea con material práctico".

Una misma actividad, como el estudio de las secciones del cubo (los polígonos que aparecen al dar un corte plano), puede dar lugar a diversas formas de trabajar dependiendo del nivel de los estudiantes:

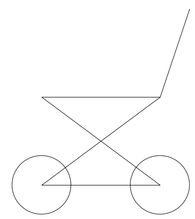
*En una primera fase habrán de cortar cubos de porex para ver qué sección obtienen.

*Avanzado el trabajo habrán de predecir cómo hay que dar el corte para producir una determinada sección, sólo entonces podrán cortar el cubo. En este caso, el trabajo práctico se utiliza como comprobación de las conjeturas realizadas.

*Estudiantes de cursos posteriores habrán de contentarse con el dibujo de la sección sobre el diagrama de un cubo y, para algunos será suficiente con un trabajo en el que la única herramienta sea su imaginación.

en un excelente artículo en el que afirma: "el que sea o no un cuadrilátero puede depender de lo que pretenda la profesora, lo mejor sería dejarlo abierto y estar así libre para adoptar cualquiera de las dos opciones según las necesidades especiales de la situación particular en que surjan".

El hecho de que sea o no un cuadrilátero puede ser relevante en matemáticas y sus implicaciones teóricas -en caso de que lo fuera tendríamos un cuadrilátero en el que la suma de los ángulos interiores difiere de 360^0-. Pero, aunque los argumentos teóricos nos llevaran a la conclusión de desecharlos como cuadriláteros, de ello no se seguiría su exclusión de las matemáticas escolares, como nos muestran sus interesantes aplicaciones tecnológicas:



también en la construcción de instrumentos de dibujo como el inversor de Hart y el cardiógrafo o en la construcción de engranajes elípticos.

5. La simetría como criterio.

El trabajo realizado hasta el momento proporciona nuevas formas de enfocar la clasificación. Podemos atender a los elementos de simetría de los cuadriláteros.

La primera fase se centra en la identificación de los elementos de simetría de los cuadriláteros conocidos:

*Cuadrado: 4 ejes de simetría.

*Rectángulo y rombo: 2 ejes

*Trapecio isósceles: 1 eje

para después reorganizar las conclusiones obtenidas en un diagrama. Dos son las vías para hacerlo:

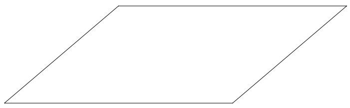
*Partir de la figura más simétrica (el cuadrado), y deformar poco a poco la figura para ir eliminando algunos de esos elementos.

Varillas

*Comenzar por una figura asimétrica, y añadir o eliminar regiones para que aparezcan elementos de simetría.

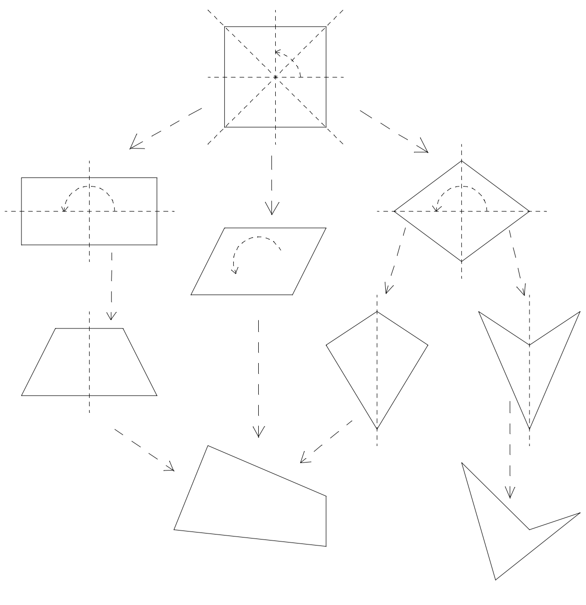
A pesar de haber realizado el trabajo anterior, en algunas clases pudimos detectar algunas ausencias notables, como las de los cuadriláteros cóncavos y algunos de los que no responden a los cuadriláteros *de siempre* como el cometa.

A lo anterior hay que añadir las dificultades para identificar la simetría del paralelogramo.



Se dan cuenta de que, en cierto sentido, es una figura simétrica, pero todos los intentos de trazar ejes de simetría son infructuosos. Es el momento que puede aprovechar el profesor o la profesora para introducir -en algunos casos recordar- la idea de centro de rotación y su orden.

De esta forma podemos llegar a un diagrama:



La visión del esquema puede sugerir algunas preguntas relacionadas con los cuadriláteros y el número 3: ¿Por qué no hay

En la utilización de recursos no sólo hay que reflexionar sobre cómo y cuando utilizarlos, sino también son obligadas otras preguntas: cómo y cuando dejarlo de lado, para pasar a otros recursos menos figurativos o simplemente no utilizar ninguno.

Los planteamientos didácticos más frecuentes son dos:

*_Qué puedo utilizar para_ que los estudiantes aprendan un determinado contenido matemático. En este caso, la tarea del profesor consiste en seleccionar el material más adecuado, analizar los aspectos que se trabajan mejor con él y cuales quedan incompletos para intentar cubrirlos con otros materiales.

*_Qué puedo hacer con_ un determinado material: cuáles son las preguntas que, por el hecho de utilizar ese recurso, son las que saldrán a relucir en el trabajo de los estudiantes, cómo ponerlas al alcance de las capacidades de esos estudiantes, qué puedo sugerir cuando surja tal cuestión.

En cualquiera de las dos formas de trabajo, el recurso no constituye un fin en sí mismo, no es más que un medio para el aprendizaje, cuyo fin es el de servir de intermediario entre el conocimiento matemático y los estudiantes.

UTILIZACIÓN DE RECURSOS DIVERSOS.

Si la dificultad de los conceptos matemáticos hace aconsejable la utilización de materiales, hay que ser conscientes de que un recurso didáctico favorece el trabajo, pero no garantiza el éxito. Para que el trabajo sea eficaz es conveniente utilizar distintos materiales, cada uno de ellos pondrá el énfasis en determinados conceptos y relacionará esos conceptos con otros y los utilizará de una determinada manera

En el ejemplo propuesto para el estudio de los polígonos y en particular de los cuadriláteros, las **varillas** han puesto de relieve la forma de unir los lados mediante vértices, la rigidez y las deformaciones, la variabilidad del área con un determinado perímetro, área máxima y mínima, cuestiones como el paralelismo o la perpendicularidad y podemos llegar al estudio de otros temas como la proporcionalidad y los lugares geométricos, o pasar a otras partes de las matemáticas con la construcción de tablas, la interpretación y el estudio de gráficas o la obtención de formulas y también se plantean cuestiones más generales como la clasificación.

Cuando utilicemos otros recursos didácticos, resaltarán nuevos elementos, propiedades y relaciones de los polígonos que habrán quedado ocultas, porque las varillas no han podido sacar a relucir.

*El **geoplano** y las **tramas** hacen resaltar las cuestiones derivadas del perímetro y el área -la unidad está siempre patente-. Los procesos de triangulación y cuadriculación son muy fáciles de hacer. La perpendicularidad hace que el teorema de Pitágoras surja con facilidad.

*Los **espejos** y el **mira** nos indican con rapidez los ejes de simetría de un polígono, mientras el **libro de espejos** pone de relieve la relación entre el ángulo central y el número de lados en los polígonos regulares.

*Con **palillos** se generan con gran facilidad pautas y cadencias numéricas en el estudio de la cantidad de palillos necesarios para construir una colección de triángulos, cuadrados, pentágonos, etc. adosados.

*Los **Mosaicos** para estudiar los recubrimientos de una superficie plana con polígonos atendemos a los ángulos interiores y a la suma de ángulos en las uniones de unos polígonos con otros en los vértices. Un estudio sistemático de los mosaicos da paso a las isometrías y a conceptos como la regularidad.

*El **tangram** es muy útil para estudiar la equivalencia de superficies y las relaciones perímetro-área.

*Los **troquelados** dan el salto de los del plano al espacio: los polígonos se convierten en caras, aparecen los ángulos diedros y poliedros. Una vez situados en el espacio, las **retículas** servirán para analizar formas de rellenarlo.

*Si utilizamos **varillas** de madera, a las que previamente se han colocado unos cáncamos

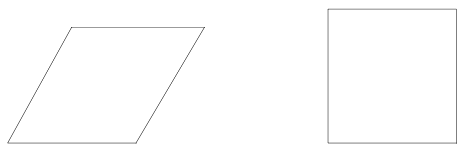
ninguno con tres ejes de simetría?. ¿Y con centro de rotación de orden 3?.

6. De nuevo con varillas. Longitudes de los lados.

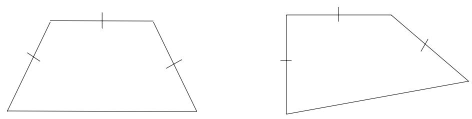
En una primera clasificación de los cuadriláteros atendiendo a las longitudes de los lados, podemos apreciar cinco clases: cuatro lados iguales (4), tres iguales y uno distinto (3-1), iguales dos a dos (2-2), dos iguales y los otros dos distintos (2-1-1) y los cuatro lados de longitudes distintas (1-1-1-1).

Pero un examen más detallado, ayudado de un buen sistema de codificación, revela que esas cinco clases se convierten en siete. Cada una de ellas tendrá una colección de cuadriláteros:

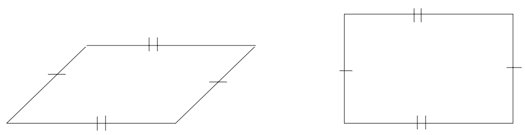
*(4) a,a,a,a: rombos, con el caso particular del cuadrado.



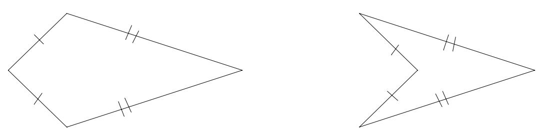
*(3-1) a,a,a,b: trapecio isósceles y otros cuadriláteros



*(2-2) a,b,a,b: paralelogramo, con el caso especial del rectángulo.

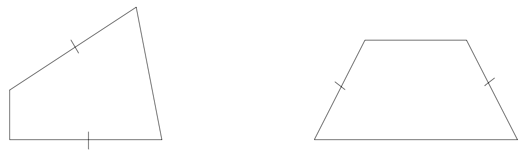


*(2-2) a,a,b,b: cuando es convexo la cometa y cuando es cóncavo la punta de flecha.

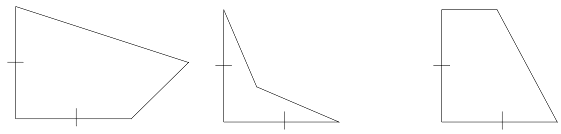


Varillas

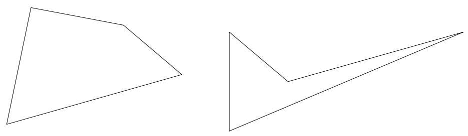
*(2-1-1) a,b,a,c: hay muchos cuadriláteros, pero sólo uno tiene forma especial, el trapecio isósceles.



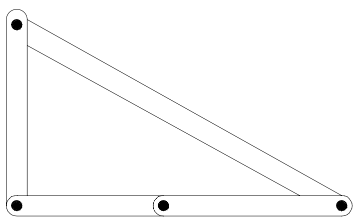
*(2-1-1) a,a,b,c: cuadriláteros, algún trapecio.



*(1-1-1-1) a,b,c,d: cuadriláteros.



En el paso de los cuadriláteros convexos a los cóncavos, hay un momento en el que aparece un cuadrilátero difícil de catalogar, sobre todo si esto ocurre después de haber debatido sobre los cuadriláteros cruzados. Es el caso de:



y es que en esta forma de trabajar, las sorpresas surgen donde menos las esperamos.

Cuando analizamos el caso a,b,a,b obtenemos el rectángulo. Esto puede dar pie a revisar todo el trabajo estudiando el número máximo de ángulos rectos en cada uno de los siete casos analizados. Esta revisión también puede hacerse desde la óptica del paralelismo entre los lados, e incluso desde la simetría.

cerrados en los extremos, que servirán para unir unas varillas con otras mediante trozos de cuerda, podremos construir los armazones de los poliedros, con la consiguiente ampliación al espacio de conceptos estudiados en el plano: rigidez, simetría, regularidad y otros nuevos como la obtención de las medidas de las aristas de los poliedros regulares para inscribir unos dentro de otros.

La utilización de recursos no se queda aquí, como se expresó en el Simposio de Valencia (1987): "No es la incorporación de tres o cuatro herramientas espectaculares lo que caracterizará la nueva organización de las clases, sino el uso habitual y cotidiano de una gama amplísima de materiales, que hagan del aula de matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria, un verdadero laboratorio-taller".

Además de los materiales reseñados en el ejemplo anterior, tenemos muchos otros que podemos utilizar para el aprendizaje de la geometría, algunos son de uso común: papel, tijeras, plastilina, cuerdas, instrumentos de medida; otros son materiales elaborados por profesores: transparencias, diapositivas.

Las matemáticas recreativas proporcionan buenos modelos para el aprendizaje de la geometría, sobre todo en aspectos como la visión espacial con rompecabezas tanto planos -diversos tangram-, como espaciales -cubos Soma y de Steinhaus-.

Los últimos años se han producido algunos videos con contenidos matemáticos. En muchos casos no hacen sino repetir las clases con una metodología tradicional, pero otros proporcionan una buena forma de interesar a los estudiantes en el aprendizaje de ciertos temas matemáticos. Tenemos interesantes ejemplos con "Donald en el país de las matemágicas", "Del plano al espacio" del Grupo Cero y "17 sinfonías para una loseta" de Rafael Pérez.

Parece que no se puede hablar de recursos en matemáticas sin hacerlo de las calculadoras.

Desde el punto de vista de la Geometría, las ventajas que ofrece esta herramienta son las mismas que en otros campos: si realizan las operaciones aritméticas el interés del estudiante se centra en la resolución de los problemas geométricos planteados. Pero hay otro factor a tener en cuenta: la única forma de dedicar más tiempo a la geometría consiste en reducir el que se dedica a la aritmética, en especial a la consolidación de las destrezas de cálculo.

La introducción progresiva de los ordenadores en las clases también proporciona nuevos recursos para la Geometría. Hay gran cantidad de programas con contenido geométrico, desde los diseñados para uso escolar como Logo o Cabri hasta los de dibujo geométrico: Corel Draw, Autosketch, Autocad, Deluxe Paint cuya característica diferenciadora es la de proporcionar una colección de herramientas de dibujo que favorecen la utilización de determinadas estrategias.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.

ALSINA, C. BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. Materiales para construir la Geometría. Síntesis. Madrid. 1988.

ALSINA, C. PÉREZ, R. y RUIZ, C. Simetría dinámica. Síntesis. Madrid. 1988.

ALSINA, C. Miralandia. Proyecto Sur. Granada. 1992.

BAS, M. y BRIHUEGA, J. Geoplanos y Mecanos. M.E.C. Madrid. 1987.

BETTINELLI, B. Jeux de formes. Formes de jeux. I.R.E.M. de Beçancon. 1984.

BOSSARD, Y. Rosaces, frises et pavages. 2 Vols. CEDIC. Paris. 1977

CASTELNUOVO, E. La geometría. Labor. Barcelona. 1963.

CERO, Grupo. De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas. 6 Vols. Generalitat Valenciana. 1988.

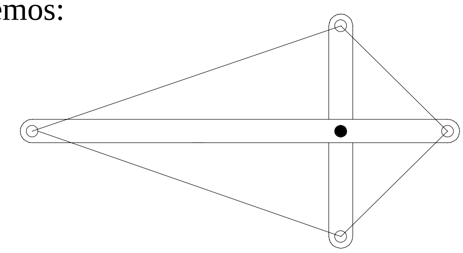
CUNDY, H., ROLLET, A. Modèles mathematiques. CEDIC. Paris. 1978.

EPSILON, Revista. Número monográfico dedicado a la Alhambra. A.P.M.A. Granada. 1987.

FIELKER, D. Rompiendo las cadenas de

7. Aún hay más.

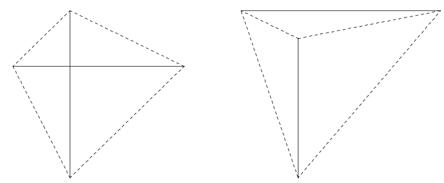
Hemos analizado diferentes opciones para trabajar los triángulos y los cuadriláteros con varillas. Estas propuestas pueden ser adaptadas a las matemáticas escolares de distintas edades, y también para los distintos niveles que encontramos dentro de una clase. Pero aquí no acaba el trabajo, si se considera que estas propuestas de trabajo no tienen suficiente dificultad para algunos estudiantes, siempre podemos encontrar ese *más difícil todavía* en el que las matemáticas tienen una experiencia secular. Podemos clasificar los cuadriláteros atendiendo exclusivamente a las diagonales. Las varillas son ahora las diagonales de un cuadrilátero determinado por la línea poligonal que une los cuatro extremos:



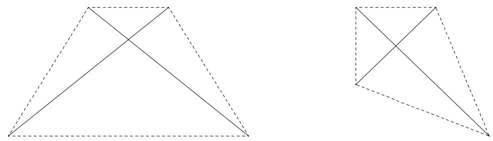
en algunos cursos puede ser conveniente pasar una goma por los extremos para que se vea físicamente el cuadrilátero. En otros, será suficiente la imaginación de los estudiantes.

La primera fase de trabajo exploratorio detecta una serie de criterios de clasificación mucho más complejos que los anteriores:

*Que las diagonales se corten o no.

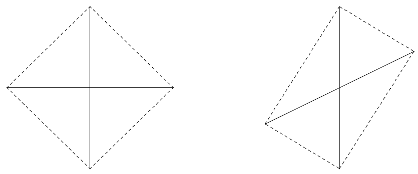


*Que las diagonales sean de la misma longitud o de longitudes distintas.

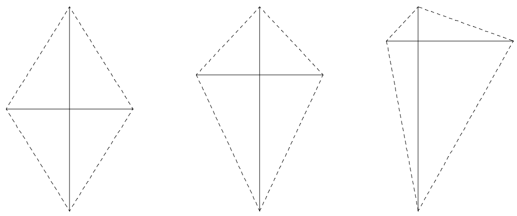


Varillas

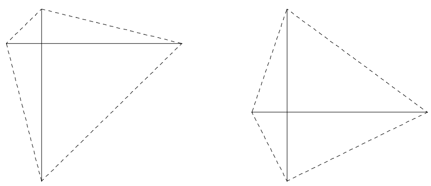
*Que el ángulo de corte sea recto o no.



*Que se corten en el punto medio de las dos diagonales, en el punto medio de una de ellas o de ninguna.



*En el caso en que las diagonales sean iguales, no dará lo mismo cuando se corten a la misma distancia de los extremos o a distancias distintas.



Esto da lugar a una amplia colección de casos interesantes de analizar.

Obsérvese que el primer criterio expuesto -que las diagonales se corten o no-, suele ser uno de los últimos en aparecer en el trabajo práctico. No es fácil darse cuenta de que las diagonales también tienen la posibilidad de no cortarse. Sin embargo, cuando lo que reflejamos es la revisión del proceso seguido, lo exponemos en primer lugar y de ahí derivamos hacia el trabajo sobre el punto de corte y la inclinación.

El trabajo admite otras líneas de trabajo adicionales:

*Admitir los cuadriláteros cruzados en las clasificaciones anteriores: simetría, longitudes de los lados, diagonales, etc.

*Modificar el números de lados: clasificar pentágonos y hexágonos.

Euclides. M.E.C. Madrid. 1987.
GATTEGNO, C. El material para la enseñanza de las matemáticas. Aguilar. Madrid. 1967.
GUILLÉN, G. Poliedros. Síntesis. Madrid. 1991.
GUTIERREZ, A y FERNÁNDEZ, A. Actividades con el Geoplano para la E.G.B. E.U.F.P.E.G.B. Valencia. 1985.
HERNÁN, F. y CARRILLO, M. Recursos en el aula de matemáticas. Síntesis. Madrid. 1988.
LEAPFROGS, Group. Leapfrogs Action Books. Tarquin. Norfolk.
MORA, J.A. y RODRIGO, J. Mosaicos. 2 Vol. Proyecto Sur. Granada. 1993.
MOTTERSHEAD, L. Resources of mathematical discovery. Basil Blackwell. Oxford. 1984.
O'DAFFER, P. y CLEMENS, S. Geometry. An investigative approach. Addison Wesley. California. 1977.
STEINHAUS, H. Instantáneas matemáticas. Salvat. Barcelona. 1986.
WALTER, M. Geometría. M.E.C. Madrid. 1988.

DIRECCIONES DE INTERÉS

ABACUS. Ausias March, 16. 08269-Barcelona.
ARNOLD. Parkside Lane. Dewsbury Road. Leeds LS11 5TD.
BÁSICA3. Luis Oliart, 68. 46006-Valencia.
DIDASVAL. Reina Doña María, 9. 46006-Valencia.
DISTESA. Josefa de Valcárcel, 17. 28027-Madrid.
INVICTA PLASTICS Ltd. OADBY. Leycester.
LADO. Carretera Madrid-Toledo km 7,3. 28916-Leganés Madrid.
PRODIDACTA SL. Eduardo Dato, 9, 46017-Valencia
PHILIP & TACEY. Ltd. North Way, Andover. Hampshire SP10 5BA
TASKMASTER Ltd. Morris Road. Clarendon Park. Leicester LE2 6BR.
ZÓCALO. Hermosilla, 117. 28009-Madrid.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

COCKROFT, W. Las matemáticas sí cuentan.

M.E.C. Madrid. 1985
del CARMEN, L. y ZABALA, A. El proyecto curricular de centro. en AA.VV. Del proyecto Educativo a la Programación de Aula. Graó. 1992.
KAMII, C. El niño reinventa la aritmética. Visor. Madrid. 1985.
PUIG ADAM, P. Enseñanza heurísitica de de la matemática. En N.R.EE.MM. núm 7. 1985.
PAPERT, S. Alas para la mente. Galápago. Buenos Aires. 1982.
SIMPOSIO DE VALENCIA. Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90. Mestral. Valencia. 1987 .

Varillas

*Restringir la búsqueda de cuadriláteros al geoplano o a la trama cuadrada.
*Utilizar las varillas para construir instrumentos de dibujo: bisector, regla de trazar paralelas, inversor, pantógrafo, simetrizador, etc.

BIBLIOGRAFÍA

BOLT, B. Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología. Labor: Barcelona. 1991
CRAWFORTH, D. ¿Qué es un cuadrilátero?. En Walter, M. ed. Geometría. M.E.C.: Madrid. 1988
FIELKER, D. Rompiendo las cadenas de Euclides. M.E.C. Madrid. 1987.

Varillas

Varillas