Resolución de ecuaciones con calculadoras gráficas

José Antonio Mora Sánchez. Profesor de Secundaria. Alicante.

Resumen.

En este artículo se revisa el tratamiento escolar de la resolución de ecuaciones. En demasiadas ocasiones, el aprendizaje de los métodos de resolución oculta la esencia misma de la resolución: el estudiante de los primeros cursos de secundaria ha de concentrarse de tal forma en las dificultades que tiene, para aplicar correctamente el método de resolución, que suele perder de vista con facilidad el objetivo de su trabajo.

Las calculadoras gráficas proporcionan métodos muy generales, lógicos e intuitivos para los estudiantes, como puede ser el de aproximaciones sucesivas al punto de corte mediante el uso repetido del zoom, pero se corre el riesgo de provocar el descuido de ciertas herramientas matemáticas necesarias en estudios posteriores.

Por último, se analizan algunas destrezas que han de adquirir mayor peso en las matemáticas escolares cuando se utilizan las calculadoras gráficas como herramienta en las clases de matemáticas: el estudio global de las funciones y de los tipos de crecimiento, el saber elegir la escala adecuada o situarse en el lugar de observación oportuno.

1. La resolución de ecuaciones.

El tratamiento que se da a las ecuaciones en las clases de secundaria, suele estar basado en la exposición que el libro de texto y/o el profesor hace del método de resolución de cada uno de los tipos de ecuaciones, seguido de los casos particulares y los ejercicios de práctica de esas destrezas. De esta forma corren igual suerte ecuaciones lineales, cuadráticas, polinómicas, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc.

En principio no habría nada que objetar, todas son ecuaciones y cada una es tratada con el método más apropiado a la ocasión, con la ventaja adicional de haber sido depurado tras muchos años de práctica, de forma que llega a nuestros estudiantes desprovista de errores y con todos los atajos preparados.

Los artificios elegidos son los más apropiados para cada caso, han dado suficientes pruebas de ello en su evolución a lo largo de la historia del álgebra, pero son muy distintos unos a otros. La ecuación de primer grado, tiene una secuencia de trabajo muy clara: denominadores, paréntesis, agrupar y despejar. En la ecuación cuadrática hay métodos para casos particulares, aunque siempre podemos aplicar la fórmula. Para una ecuación exponencial se hace necesario recordar las operaciones con potencias y utilizarlas en el momento adecuado. Para resolver una ecuación trigonométrica, hay que tener en mente una amplia colección de reglas de simplificación y, lo que es más importante, saber cómo nos ayudan a progresar en la búsqueda de la solución.

Los métodos algebraicos tienen varios factores en contra: absorben de tal forma la atención del principiante, que es muy difícil que llegue a explicar lo que busca cuando está en pleno proceso de resolución de una ecuación, por muy bien que aplique el algoritmo aprendido. Estas diferencias en el método se acentúan con el tiempo, ya que su introducción y práctica se produce en momentos distintos del aprendizaje escolar: entre unas ecuaciones y otras puede haber tres o cuatro cursos de diferencia. A esto hay que añadir que el uso que después se hace de ellas es demasiado esporádico para que los estudiantes los fijen en la memoria.

A pesar de las diferencias en el método, conceptualmente todas las ecuaciones proponen una misma tarea: la búsqueda de uno o varios valores numéricos que hacen que la igualdad se verifique o la comprobación de que esos valores no existen. Esto es lo que les confiere su identidad como ecuaciones con anterioridad a cualquier clasificación que se establezca.

Cuando sólo se disponía de calculadora científica, el método de aproximaciones sucesivas siempre ha ofrecido la ventaja de proporcionar una cierta unidad en el tratamiento de todo tipo de ecuaciones. El inconveniente de estos procedimientos es el de los métodos iterativos que necesitan de la intervención de las personas, y es que se convierten en una repetición de tareas rutinarias de escaso valor formativo. Esto explica, en parte, su escaso éxito en las matemáticas escolares.

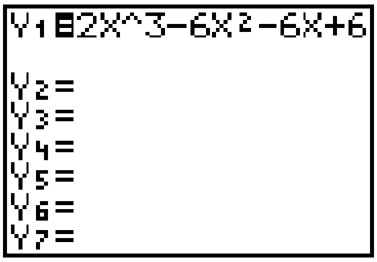
El tratamiento gráfico de las ecuaciones proporciona un apoyo visual a la idea de valor de verdad, como punto de corte de una función con el eje de abscisas - o como punto común a dos curvas -, pero en la mayoría de los casos es impracticable, como el caso anterior, si estamos obligados a dibujar las gráficas punto a punto. Cuando la calculadora automatiza este proceso, no podemos decir que ha resuelto el problema, sino que lo ha transformado, ahora ya no necesitamos dibujar manualmente la curva, pero aún nos quedan muchas cosas por hacer:

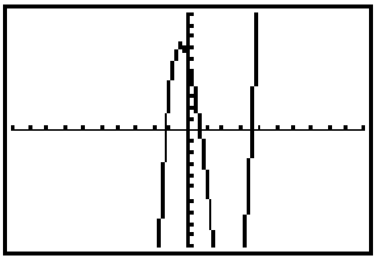
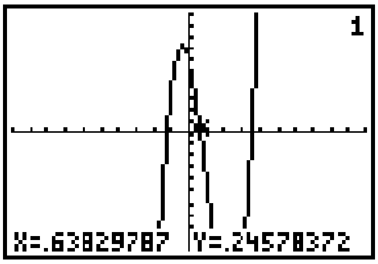
- Traducir la ecuación al lenguaje de la calculadora,
- Movernos por las herramientas disponibles en la calculadora para elegir las más adecuadas.
- Saber desde dónde veremos mejor la función o las funciones implicadas (situar un punto de observación).
- Elegir la escala adecuada para verlo mejor.

2. Métodos para resolver una ecuación.

2.1 Representación gráfica.

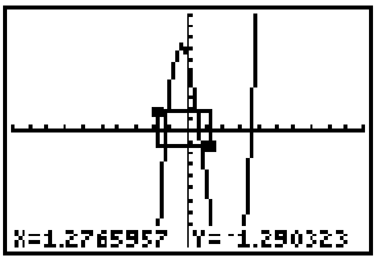
Para resolver la ecuación $2x^3-6x^2-6x+6=0$, introducimos la función $y=2x^3-6x^2-6x+6$ en la calculadora y la representamos gráficamente en la pantalla.

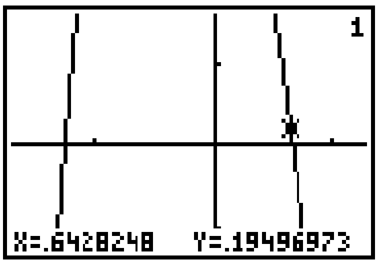


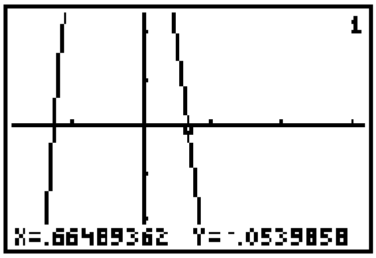



Las raíces de la ecuación vienen dadas por los puntos de corte de la función con el eje de abscisas. La calculadora permite que nos movamos sobre la curva, para situarnos en el punto más cercano a la raíz. Podemos ampliar la zona que deseemos, para ello tenemos varias opciones:

***Zoom de caja**: necesitará dos vértices opuestos del rectángulo que servirán de extremos a la abscisa y la ordenada para la nueva pantalla.

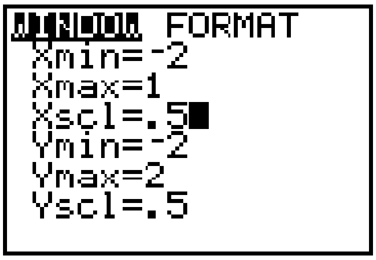


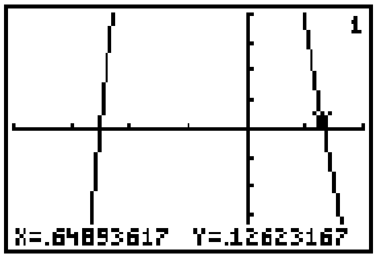


*

***Zoom de acercamiento**: con centro en el lugar en que se encuentra el cursor, se realiza una ampliación de una región de la pantalla con un factor determinado (normalmente es 4 por defecto).

*** Modificar los extremos de la ventana:** manualmente señalamos los valores de x e y entre los que deseamos estudiar la función. Es una opción interesante cuando hemos obtenido previamente información de la región que vamos a analizar, mientras que las dos anteriores tienen más sentido cuando realizamos pruebas para determinarla.



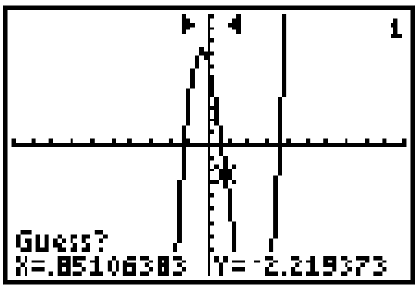


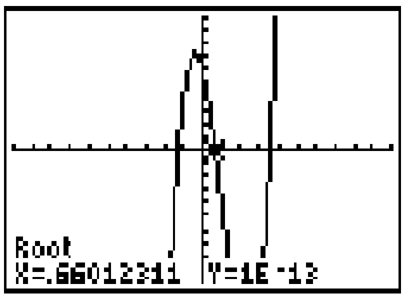
Cualquiera de los tres procedimientos descritos se puede realizar repetidamente hasta conseguir la aproximación deseada, en función de las exigencias de la situación.

2.2 Herramientas para el cálculo de raíces.

Las calculadoras gráficas incorporan una colección de herramientas muy potentes, que permiten realizar cálculos complejos sobre gráficas de funciones para obtener la solución de una ecuación.

*Primero nos pide un punto sobre la curva que esté a la izquierda y otro a la derecha de la raíz, y por último una aproximación al punto de corte.





La calculadora gráfica podría sustituir el trabajo de manipulación algebraica que se realiza en las matemáticas escolares. En un futuro, cuando las calculadoras gráficas se generalicen tanto como lo están ahora las calculadoras científicas, la situación aportará ciertas ventajas:

- No hay necesidad de aprender distintos métodos para cada tipo de ecuaciones.
- Los métodos de la calculadora - tanto científica como gráfica -, son mucho más intuitivos y conectan mejor con otros conocimientos matemáticos, menos formales que los algebraicos.
- Podremos llegar a muchos más estudiantes, que ahora se ven desanimados por la complejidad de los métodos utilizados. El porcentaje de estudiantes que sigue con aprovechamiento la resolución de todas las ecuaciones que se tratan de enseñar en secundaria es muy bajo.

Pero no todo serán ventajas, esta situación también tiene previsibles inconvenientes:

- Las reglas de manipulación algebraica no están en la enseñanza de las matemáticas para martirizar a los estudiantes ni por capricho de los diseñadores de los programas, sino por la utilidad de las expresiones para representar situaciones y analizarlas desde la óptica científica.
- Las calculadoras gráficas todavía no se han generalizado entre los estudiantes como lo han hecho la calculadora elemental o la científica.
- En caso de adoptar la opción de tratar las ecuaciones con la ayuda de las calculadoras gráficas, sería deseable un cierto consenso, entre los enseñantes que establezca una serie de normas comunes. Sería algo parecido a lo que ocurre actualmente con el algoritmo de cálculo de las raíces cuadradas que está siendo desterrado de la escuela como ya ocurriera hace años con la raíz cúbica. La utilización de las calculadoras gráficas en pruebas como la selectividad será algo inevitable dentro de poco tiempo, esto hará que aumente su importancia para provocar cambios en el currículum de las matemáticas del bachillerato.
- Con la generalización de las calculadoras se hacen necesarios estudios que profundicen en cuáles son las destrezas matemáticas necesarias para sacar partido de ellas. Los estudiantes deberán dedicar su esfuerzo a todo aquello que las calculadoras no son capaces de hacer, en especial a la búsqueda de relaciones entre los conceptos matemáticos implicados.

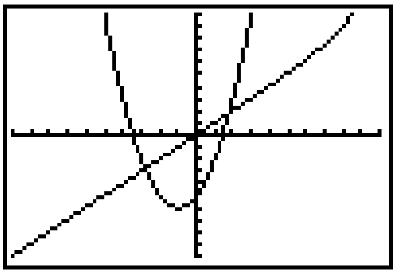
En cualquier caso, el método gráfico combina dos perspectivas del problema inherente a la resolución de ecuaciones: el dar sentido lógico - el valor o valores de x que satisfacen la condición planteada algebraicamente o mediante un enunciado -, y sentido geométrico - punto o puntos de intersección de curvas -. De esta forma el estudiante comprenderá mejor lo que se está haciendo, no es sólo un proceso de sustitución mecánica. Por otra parte, no hay que perder de vista que el tratamiento gráfico abre la puerta a una poderosa herramienta para la resolución de problemas matemáticos de muy diversos tipos.

3. Destrezas para utilizar calculadoras gráficas.

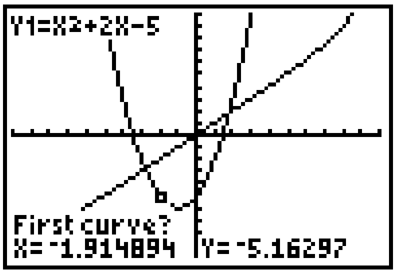
3.1 Análisis del comportamiento de las funciones.

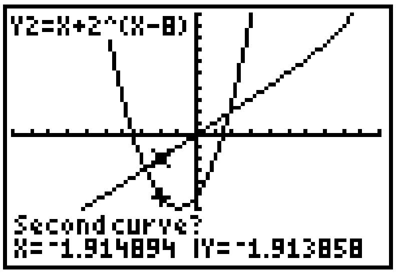
Las calculadoras posibilitan el tratamiento de problemas que no se podrían proponer sin ellas. El abanico de ecuaciones que podemos resolver mediante métodos algebraicos queda limitado a los que se realizan en la escuela, mientras que la calculadora permite que se puedan abordar muchas otras. En Mora (1995) proponía como ejemplo la resolución de ecuaciones en las que están implicadas funciones polinómicas y exponenciales. Veremos aquí otro ejemplo con más detalle.

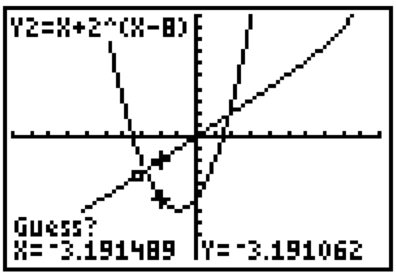
En matemáticas se enseña a resolver ecuaciones polinómicas y también las exponenciales, pero no tenemos método algebraico cuando lo que nos encontramos es una combinación de ambas. El tratamiento con calculadora gráfica no es más que una pequeña variación del proceso seguido para la obtención de raíces: en lugar de obtener los puntos de corte con el eje de abscisas, buscamos los puntos de corte de dos curvas. Dibujaremos las funciones $y = x + 2^{(x-8)}$ e $y = x^2 + 2x + 5$ para obtener los puntos de corte de estas dos curvas. También podíamos haber seguido un procedimiento iterativo con el zoom para cada una de las raíces.

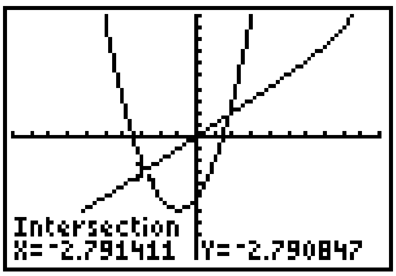


Para obtener cada punto de corte la calculadora nos pide que indiquemos cada una de las curvas y que le proporcionemos una aproximación:



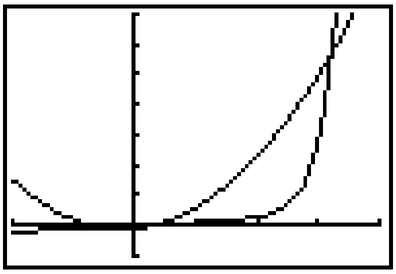


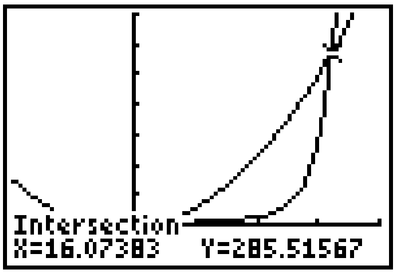




De esta forma obtenemos los dos puntos de corte. Pero hay detalles que han escapado a la calculadora en la que sólo hemos visto la *pantalla estándar* (-10<x<10, -10<y<10). A partir del punto de corte que hay más a la derecha, la gráfica de $y = x + 2^{(x-8)}$ queda por debajo de la gráfica de $y = x^2 + 2x + 5$. Es el momento de aportar nuestros conocimientos sobre funciones exponenciales y polinómicas: podemos estar seguros de que esa situación ha de cambiar para valores mayores del exponente ya que una función exponencial con base 2 crecerá, a la larga, mucho más rápidamente que cualquier función polinómica.

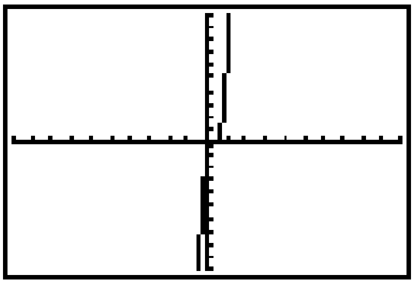
Si dibujamos ahora la gráfica para -10<x<20, -50<y<350, nos encontramos con la confirmación de lo anterior: el cuarto punto de corte que no aparecía en la ventana anterior:



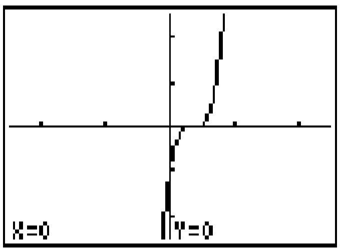


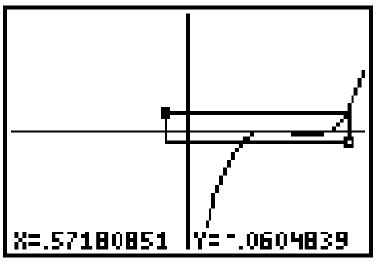
3.2 Elección de la escala adecuada.

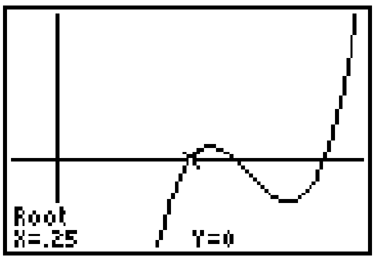
En algunos casos tenemos ecuaciones como $4x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$ que, al ser representadas como función, parecen tener un punto de intersección con el eje de abscisas, al hacer la representación estándar (entre -10 y 10).



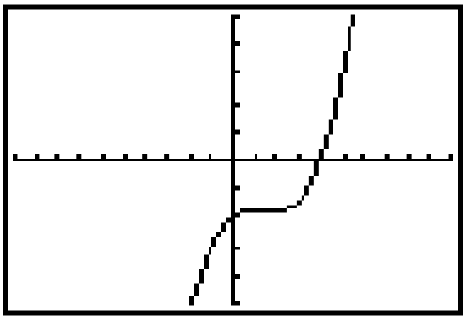
Una ecuación cúbica puede tener hasta tres puntos de intersección con el eje de abscisas y, si nos acercamos a esa región con el zoom, vemos que no hay uno, sino tres puntos de corte:





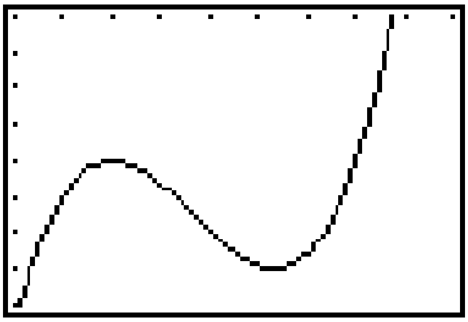


En este caso se puede invocar que lo que en muchos sitios se llama *sensatez* en la utilización de calculadoras (I.C.M.I., 1986), que aquí se puede traducir por comprender que la representación de una función ha de resaltar muy claramente los aspectos más importantes que nos interesan de ella, es lo que se conoce por obtener una gráfica completa o representar la gráfica en *un dominio significativo:* representar la gráfica donde pasan las cosas importantes.



El saber analizar las funciones en un dominio significativo será muy importante en cursos posteriores, cuando se realice el estudio de funciones como $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 20$ que, cuando la representamos entre -10<x<10, -50<y<50 produce la curva de la derecha.

La inflexión para valores de x entre 1 y 2 puede ocultar alguna sorpresa, de hecho, su función derivada, $y' = 3x^2 - 8x + 5$ tiene dos raíces, para x=1 (máx) y para x=5/3 (mín). Si representamos ahora la función entre 0.6<x<2.4, 18.2<y<-17.8, tenemos dos extremos locales.



4. Conclusiones.

Las matemáticas escolares no van a quedar vacías de contenido con la introducción de las calculadoras gráficas. Lo que se va a necesitar es una mejor comprensión de las matemáticas. No hay más que fijarse en la cantidad de conceptos matemáticos traídos a cuenta de la resolución de una ecuación: funciones, gráfica, crecimiento, tasa de crecimiento, punto de corte, dominio, etc.. Todos ellos se han de entrelazar para dar respuesta a la situación planteada. No creo que se pueda plantar aquí que predominen los métodos intuitivos, muy al contrario son las consideraciones cualitativas las que han prevalecido para salir adelante.

Las calculadoras modifican el centro de atención de las matemáticas escolares con un desplazamiento hacia una comprensión más cualitativa de las matemáticas. Como se ha puesto de manifiesto en los ejemplos presentados, ha sido la comprensión de los distintos tipos de crecimiento de las funciones lo que nos ha orientado sobre la solución a las situaciones planteadas.

BIBLIOGRAFÍA

Demana, F., Schoen, H.L., y Waits, B. (1991) Ghaphics in the K-12 curriculum: The impact of the graphing curriculum. Aparecido en “Graphs and Functions”. University of Winconsin. Madison.

García, F.J. (1994). Funciones de la calculadora gráfica. Revista UNO, núm.2, pp 103-107. (Graó : Barcelona).

I.C.M.I. (1986). Las matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los noventa. Simposio de Kuwait. (Mestral : Valencia)

Monzó, O. y Grilles, M. (1995). La calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas. . Revista AULA, núm. 34, pp. 34-39 (Graó : Barcelona)

Mora, J.A. (1995). Calculadoras. (Proyecto Sur: Granada).

Mora, J.A. y García, F.J. (1995). Calculadoras en el bachillerato. Revista AULA, núm. 34, pp. 21-27 (Graó : Barcelona).

Mora, J.A. (1995).Las calculadoras en las clases de matemáticas. Revista SUMA núm. 18 pp 49-55. (F.S.P.M.: Granada)

Mora, J.A. y Grilles, M.(1996). Modelos matemáticos y regresión: el zoom de la cámara fotográfica. Revista UNO, pp.81-93 (Graó: Barcelona).